

关于分拆秩的最新进展

季青

南开大学组合数学中心

2014年4月19日

相关论文是与陈永川、沈一颖、臧经涛合作完成

整数分拆

定义

n 的整数分拆指的是一个有限的非增的正整数序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$.

例：4的分拆有5个，分别是

$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1).$$

设 $p(n)$ 表示 n 的分拆个数，则 $p(4) = 5$ 。一个自然的问题就是这个 $p(n)$ 有多大？

$p(n)$ 的近似公式

- 在1918年, 哈代和印度天才数学家拉马努金发现了分拆个数的如下渐进公式:

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}.$$

- 1937年, Rademacher 进一步得到了如下的 $p(n)$ 的级数表达式, 其中第一项与哈代-拉马努金渐进公式等价:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{d n} \left[\frac{\sinh \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right],$$

其中

$$A_k(n) = \sum_{h=1}^k \delta_{\gcd(h,k),1} \exp \left[\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left(\frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\pi i h n}{k} \right].$$

分拆函数 $p(n)$

Major MacMahon

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p(n)$	56	77	101	135	176	231	292	385	490	627

n	21	22	23	24	25	26	27	28
$p(n)$	792	1002	1255	1575	1958	2436	3010	3718

$$p(100) = 190,569,292,$$

$$p(1000) = 24,061,467,864,032,622,473,692,149,727,991$$

近似为 2.4×10^{31}

Ramanujan 的发现

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p(n)$	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

n	21	22	23	24	25	26	27	28
$p(n)$	792	1002	1255	1575	1958	2436	3010	3718

- (1) $p(4), p(9), p(14), p(19), \dots \equiv 0 \pmod{5},$
- (2) $p(5), p(12), p(19), p(26), \dots \equiv 0 \pmod{7},$
- (3) $p(6), p(17), p(28), p(39), \dots \equiv 0 \pmod{11}.$

Ramanujan分拆同余式

下面这三个同余式就是著名的Ramanujan分拆同余式。

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Ramanujan的预言

It appears that there are no equally simple properties for any moduli involving primes other than these three (i.e. $\ell = 5, 7, 11$).

(除了上述三个同余式以外 ($\ell = 5, 7, 11$)，不存在模其他任意素数的同余式。)

印度天才数学家 *Srinivasa Ramanujan* (1887-1920)



- Ramanujan 出生于印度一个贫穷的家庭，他没有受过严格的数学训练，却独立发现了将近3900个数学公式。后来被Hardy发现，深受震撼之余，出资赞助他到英国继续他的数学研究。
- Ramanujan 被誉为“印度之子”，与诗人泰戈尔并驾齐驱成为印度最受尊敬和爱戴的人物。
- Hardy亲自设计出一种计算一个人数学天分的评分表，他自己得了25分，Littlewood得了30分，同时代最伟大的德国数学家Hilbert得了80分，而Ramanujan则得了满分100分。

相关结果

- (1) Ramanujan 给出了模5和7同余式的初等证明。
S. Ramanujan, Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n ,
Proc. Cambridge Philos. Soc. 19 (1919) 207–210.
- (2) 而模11的同余式的证明首次是由物理学家Winqvist 于1969年给出，他的证明方法主要是基于Macdonald关于李代数 B_2 的一个恒等式。
L. Winqvist, An elementary proof of $p(11m + 6) \equiv 0 \pmod{11}$, *J. Combin. Theory* 6 (1969), 56–59.
- (3) 在2005年，美国数学家Ahlgren 和Boylan 利用模形式的线性空间的基证实了Ramanujan的预言。
S. Ahlgren and M. Boylan, Arithmetic properties of the partition function,
Invent. Math. 153 (2005) 487–502.

Freeman Dyson (1923–)



- Freeman Dyson, 美籍英裔数学物理学家, 普林斯顿高等研究院教授, 曾获得洛伦兹奖(1966)和蒲朗克奖(1969)。Dyson星球理论提出者。
- 当Dyson还是高二学生的时候(1941年), 他从Hardy和Wright合写的《An introduction to the theory of numbers》书中知道了Ramanujan同余式。原本他尝试着给出Ramanujan模11同余式的基本证明, 但是没有成功。不过他发现一个问题是Ramanujan的证明是无法解释的。

Dyson关于模5的问题

关于Ramanujan模5的同余式 $p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$ ，Dyson提出了这样一个问题

Dyson的问题

如何将权重为 $5n+4$ 的分拆分成五份，使得每一份中分拆个数都相等？

- Dyson希望能够找到一个分拆上的统计量，使得根据这个统计量可以将权重为 $5n+4$ 的分拆分成具有相同数目的五大份。
- 在1944年，Dyson在剑桥上大二的时候，他才完成这个心愿，找到这个“统计量”，并命名为“rank”。

Dyson的rank及Dyson猜想

定义 (Rank)

对于一个分拆 λ , 它的rank ($r(\lambda)$)定义为它的最大部分减去它的部分数。

例如, $\lambda = (5, 4, 2, 1, 1, 1)$, $r(\lambda) = 5 - 6 = -1$ 。

Dyson的猜想 [Dyson, Eureka (1944)]

设 $N(j, 5; n)$ 表示rank模5同余 j 的 n 的分拆个数, 则

$$\begin{aligned} N(1, 5; 5n + 4) &= N(2, 5; 5n + 4) = N(3, 5; 5n + 4) \\ &= N(4, 5; 5n + 4) = N(5, 5; 5n + 4). \end{aligned}$$

例子

	$n = 4$ ($p(4) = 5$)	秩模5
$N(1, 5; n)$	(3, 1)	1
$N(2, 5; n)$	(1, 1, 1, 1)	2
$N(3, 5; n)$	(4)	3
$N(4, 5; n)$	(2, 1, 1)	4
$N(5, 5; n)$	(2, 2)	5
	$n = 5$ ($p(5) = 7$)	秩模7
$N(1, 7; n)$	(3, 2)	1
$N(2, 7; n)$	(4, 1)	2
$N(3, 7; n)$	(1 ⁵)	3
$N(4, 7; n)$	(5)	4
$N(5, 7; n)$	(2, 1 ³)	5
$N(6, 7; n)$	(2, 2, 1)	6
$N(7, 7; n)$	(3, 1, 1)	7

Dyson关于“crank”的猜测

Dyson还发现这个统计量并不适用模11的情形。

$$p(6) = 11,$$

$ \lambda = 6$	$r(\lambda)$	$r(\lambda) \pmod{11}$
(6)	5	5
(5, 1)	4	4
(4, 2)	2	2
(4, 1 ²)	1	1
(3, 3)	1	1
(3, 2, 1)	0	0
(3, 1 ³)	-1	10
(2, 2, 2)	-1	10
(2, 2, 1 ²)	-2	9
(2, 1 ⁴)	-3	8
(1 ⁶)	-5	6

相关文献

- (1) Dyson 始终没有找到关于“rank”两个猜想的证明。这两个猜想的证明最后有两位著名的数论数学家Atkin和Swinnerton-Dyer给出。并且他们在证明过程中发现这个猜想与mock theta function等式。

A. O. L. Atkin and P. Swinnerton-Dyer, Some properties of partitions, *Proc. Lond. Math. Soc. III. Ser.* 4 (1954) 84–106.

- (2) 在1988年，美国科学院院士G.E. Andrews和F. Garvan终于找到了解释模11同余式的统计量（crank）。

G. E. Andrews and F. G. Garvan, Dyson's crank of a partition, *Bull. Am. Math. Soc.* 18 (1988) 167–171.

Andrews-Garvan-Dyson秩

定义 (Crank)

对于一个分拆 λ , 它的“crank” $c(\lambda)$ 定义为

$$c(\lambda) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{if } n_1(\lambda) = 0, \\ \mu(\lambda) - n_1(\lambda) & \text{if } n_1(\lambda) > 0. \end{cases}$$

其中 $n_1(\lambda)$ 指的是分拆 λ 中部分为1的个数; $\mu(\lambda)$ 指的是分拆 λ 中部分大于 $n_1(\lambda)$ 的个数。

例如, 对于 $\lambda = (5, 3, 2, 1, 1, 1)$, 它的“crank”
为 $\mu(\lambda) - n_1(\lambda) = 1 - 3 = -2$.

例子

$$p(6) = 11$$

λ	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 11$
$(5, 1)$	0	0
$(3, 2, 1)$	1	1
(2^3)	2	2
(3^2)	3	3
$(4, 2)$	4	4
(1^6)	-6	5
(6)	6	6
$(2, 1^4)$	-4	7
$(3, 1^3)$	-3	8
$(2^2, 1^2)$	-2	9
$(4, 1^2)$	-1	10

George E. Andrews和Frank Garvan还发现统计量“crank”不仅对于模11情形是成立，而且对模5和7的情形都是成立的。

$ \lambda = 4$	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 5$	$ \lambda = 5$	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 7$
$(3, 1)$	0	0	$(4, 1)$	0	0
(1^4)	-4	1	$(2^2, 1)$	1	1
(2^2)	2	2	(1^5)	-5	2
$(2, 1^2)$	-2	3	$(3, 2)$	3	3
(4)	4	4	$(2, 1^3)$	-3	4
			(5)	5	5
			$(3, 1^2)$	-1	6

Ramanujan同余式及其他同余式

定义. 设 ℓ 为任意素数, 我们称下面的同余式为**Ramanujan同余式**若对所有 n

$$p(\ell n + t) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

考虑分拆函数 $p(n)$ 是否具有下面这样的同余式:

$$p(A n + B) \equiv 0 \pmod{\ell} \text{ 对于所有 } n.$$

注意: 这里 A 不一定为素数 ℓ .

存在无穷多个同余式

美国Emory大学的A.G. Candler教授Ken Ono（美国数学会学报（Proc. AMS）的主编及美国数学会公告（Bull. AMS）的副主编）借助于模形式理论中Serre定理证明

定理 [Ono, Ann. Math. (2000)]

对于任意素数 $\ell \geq 5$ ，存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$ 满足下面的同余式

$$p(An + B) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

借助于Ono提出的方法，Weaver (Ramanujan J. (2001))发现了模 $13 \leq \ell \leq 31$ 的76,065个同余式。



K. Ono, Distribution of the partition function modulo m , Ann. Math. (2) 151 (2000) 293–307.



R.L. Weaver, New congruences for the partition function, Ramanujan J. 5 (2001) 53–63.

无穷同余式的组合解释

美国数学家K. Mahlburg发现利用crank可以给出Ono得到的无穷多个同余式的组合解释。

定理 [Mahlburg, PNAS (2005)]

给定素数 $\ell \geq 5$, 则存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$ 使得对于任意 $0 \leq m \leq \ell - 1$, 有

$$M(m, \ell; An + B) \equiv 0 \pmod{\ell},$$

其中 $M(i, t; n)$ 表示crank模 t 余 i 的 n 的分拆个数。

注意到

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\ell-1} M(i, \ell; n).$$

高阶对称rank和crank

定义 [Andrews, Invent. Math. (2007)]

k 阶对称rank ($\eta_k(n)$) 定义为

$$\eta_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} N(m, n),$$

其中 $N(m, n)$ 表示rank为 m 的 n 的分拆个数。

定义 [Garvan, Adv. Math. (2011)]

k 阶对称crank ($\mu_k(n)$) 定义为

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} M(m, n)$$

其中 $M(m, n)$ 表示crank为 m 的 n 的分拆个数。



G.E. Andrews, Partitions, Durfee symbols and the Atkin-Garvan moments of ranks, Invent. Math. 169 (2007) 37–73.



F.G. Garvan, Higher order spt-functions, Adv. Math. 228 (2011) 241–265.

$$\begin{aligned}
 \eta_{2k+1}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m+k}{2k+1} N(m, n) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{-m+k}{2k+1} N(-m, n) \\
 &\quad \Downarrow \text{symmetry} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2k+1} \binom{m+k}{2k+1} N(m, n) \\
 &= -\eta_{2k+1}(n).
 \end{aligned}$$

这可导出

$$\eta_{2k+1}(n) = 0.$$

类似地，我们可以证明

$$\mu_{2k+1}(n) = 0.$$

k-marked Durfee symbols

定义 [Andrews, Invent. Math. (2007)]

n 的 k -marked Durfee symbol 是由 k 对分拆和一个下标组成的，其定义如下：

$$\eta = \left(\begin{array}{cccc} \alpha^k, & \alpha^{k-1}, & \dots, & \alpha^1 \\ \beta^k, & \beta^{k-1}, & \dots, & \beta^1 \end{array} \right)_D,$$

其中 α^i (resp. β^i) 表示一个分拆； $\sum_{i=1}^k (|\alpha^i| + |\beta^i|) + D^2 = n$. 而且分拆 α^i 和 β^i 必须满足下面三个条件：

- (1) 对于 $1 \leq i < k$, α^i 必须是非空的分拆，而 α^k 和 β^i 可以为空集；
- (2) 对于 $2 \leq i \leq k$, 有 $\beta_1^{i-1} \leq \alpha_1^{i-1} \leq \beta_{l(\beta^i)}^i$ ；
- (3) $\beta_1^k, \alpha_1^k \leq D$.

高阶对称 $rank$ 的组合解释

基于 q 级数中著名的变换公式（ k -fold generalization of Watson's q -analog of Whipple's theorem）

定理 [Andrews, Invent. Math. (2007)]

$\eta_{2k}(n)$ 等于权重为 n 的 $(k+1)$ -marked Durfee symbols的个数。.



G. E. Andrews, Partitions, Durfee symbols and the Atkin-Garvan moments of ranks, Invent. Math. 169 (2007) 37–73.

$$\begin{aligned}
 \eta_2(5) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \binom{m}{2} N(m, 5) \\
 &= \binom{4}{2} + \binom{2}{2} + \binom{1}{2} + \binom{0}{2} + \binom{-1}{2} + \binom{-2}{2} + \binom{-4}{2} \\
 &= 21.
 \end{aligned}$$

λ	(5)	$(4, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 1^2)$	$(2^2, 1)$	$(2, 1^3)$	(1^5)
$r(\lambda)$	4	2	1	0	-1	-2	-4

$$\begin{aligned}
 N(4, 5) &= N(2, 5) = N(1, 5) = N(0, 5) = N(-1, 5) \\
 &= N(-2, 5) = N(-4, 5) = 1.
 \end{aligned}$$

下表列举21个5的2-marked Durfee symbols.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \\ & & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & \\ & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \\ & & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} & & & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & 1_2 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & \\ & & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & & \\ & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & & \\ 1_2 & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & & 1_1 & \\ 1_2 & 1_2 & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & \\ 1_2 & & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cccc} & & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & & & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & & 1_1 \end{array} \right)_1
 \end{array}$$

分拆同余式

Andrews发现了利用 k -marked Durfee symbols可以解释下面关于高阶对称rank的同余式:

定理 [Andrews, Invent. Math. (2007)]

$$\eta_2(5n+4) = \mathcal{D}_2(5n+4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$\eta_2(7n+5) = \mathcal{D}_2(7n+5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$\eta_4(7n+5) = \mathcal{D}_3(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}.$$

其中 $\mathcal{D}_k(n)$ 表示 n 的 k -marked Durfee symbols的个数。

i-th rank for *k*-marked Durfee symbols

定义 [Andrews, Invent. Math. (2007)]

设 $\eta = \left(\begin{array}{cccc} \alpha^k, & \alpha^{k-1}, & \dots, & \alpha^1 \\ \beta^k, & \beta^{k-1}, & \dots, & \beta^1 \end{array} \right)_D$ 是 *k*-marked Durfee symbol.

分拆对 $\left(\begin{array}{c} \alpha^i \\ \beta^i \end{array} \right)$ 称为 η 的第 *i* 个向量。 η 的第 *i* 个 rank $\rho_i(\eta)$ 定义为

$$\rho_i(\eta) = \begin{cases} l(\alpha^i) - l(\beta^i) - 1 & 1 \leq i < k, \\ l(\alpha^k) - l(\beta^k) & i = k. \end{cases}$$

例如, $\left(\begin{array}{cccccc} 4_3 & 4_3 & 3_2 & 3_2 & 2_2 & 2_1 \\ & 5_3 & & 3_2 & 2_2 & 2_1 \end{array} \right)_5$ 是一个权重

为 55 的 3-marked Durfee symbol, 其中第一个 rank 为 -1, 第二个 rank 为 0, 第三个 rank 为 1.

Full-rank for k -marked Durfee symbols

定义. 设 η 是 k -marked Durfee symbol, 定义 full-rank $FR(\eta)$ by

$$FR(\eta) = \rho_1(\eta) + 2\rho_2(\eta) + \cdots + k\rho_k(\eta),$$

其中 $\rho_i(\eta)$ 表示 η 的第 i 个 rank。

设 $NF_k(r, t; n)$ 表示 full rank 模 t 余 r 的 n 的 k -marked Durfee symbols 的个数。Andrews 证明了

$$\begin{aligned} NF_2(1, 5; 5n+4) &= NF_2(2, 5; 5n+4) = NF_2(3, 5; 5n+4) \\ &= NF_2(4, 5; 5n+4) = NF_2(5, 5; 5n+4). \end{aligned}$$

从而给出 $\eta_2(5n+4) = \mathcal{D}_2(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$ 组合解释。

无穷同余式的组合解释

定理 [Bringmann, Garvan, Mahlburg, IMRN (2007)]

给定正整数 j , $k \geq 3$ 和奇数 t 及素数 $p \nmid 6t$, 则存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$ 使得对于任意 $0 \leq r \leq t-1$, 有

$$NF_k(r, t; An + B) \equiv 0 \pmod{p^j}.$$

注意到

$$\eta_{2k}(n) = \sum_{r=0}^{t-1} NF_{k+1}(r, t; n).$$

给定正整数 j , $k \geq 3$ 和奇数 t 及素数 $p > 3$, 则存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$ 使得

$$\eta_{2k}(An + B) \equiv 0 \pmod{p^j}.$$



K. Bringmann, F. G. Garvan and K. Mahlburg, Partition statistics and quasiweak Maass forms, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009) 63–97.

一个分拆恒等式

在2011年, 我们借助于[组合构造](#)的方法得到了关于 k -marked Durfee symbols 的分拆恒等式。

定理 [季青, Trans. AMS (2011)]

对于 $k \geq 2$, we have

$$\mathcal{D}_k(n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_k = -\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k-2}{k-2} N\left(\sum_{i=1}^k |m_i| + 2j + k - 1; n\right).$$



G. E. Andrews, Partitions, Durfee symbols and the Atkin-Garvan moments of ranks, Invent. Math. 169 (2007) 37–73.



K. Q. Ji, The combinatorics of k -marked Durfee symbols, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 987–1005.

k 阶对称crank

定义 [Garvan, Adv. Math. (2011)]

k 阶对称crank ($\mu_k(n)$) 定义为

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} M(m, n).$$

$$\mu_2(5n+4) \equiv \mu_2(5n) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\mu_2(7n+5) \equiv \mu_2(7n) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\mu_2(11n+6) \equiv \mu_2(11n) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\mu_4(7n+5) \equiv \mu_4(7n) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\mu_4(11n+6) \equiv \mu_4(11n) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\mu_6(11n+6) \equiv \mu_6(11n) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\mu_8(11n+6) \equiv \mu_8(11n) \equiv 0 \pmod{11}.$$

组合解释

基于之前的组合构造，我们得到了下面的公式

定理 [陈永川, 季青, 沈一颖, 2013]

对于 $k \geq 2$,

$$\mathcal{F}_k(n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_k = -\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k-2}{k-2} M\left(\sum_{i=1}^k |m_i| + 2j + k - 1; n\right).$$

其中 $\mathcal{F}_k(n)$ 表示 n 的 k -marked Dyson symbols 的个数。



William Y.C. Chen, Kathy Q. Ji and Erin Y.Y. Shen, k -marked Dyson symbols and congruences for moments of cranks, submitted.
arXiv:1312.2080.

k-marked Dyson symbols

定义 (*k*-marked Dyson symbols)

n 的 k -marked Dyson symbols 是由 k 个分拆对和 $k - 1$ 个正整数组成，其定义如下：

$$\eta = \begin{pmatrix} \alpha^{(k)}, & \alpha^{(k-1)}, & \dots, & \alpha^{(1)} \\ p_{k-1}, & p_{k-2}, & \dots, & p_1 \\ \beta^{(k)}, & \beta^{(k-1)}, & \dots, & \beta^{(1)} \end{pmatrix}$$

其中分拆 α^i 和 β^i 必须满足下面三个条件：

- (1) $p_{k-1} \geq \dots \geq p_1 \geq p_0 = 1$.
- (2) $p_i \geq \alpha_1^{(i)} \geq \alpha_2^{(i)} \geq \dots \geq \alpha_\ell^{(i)} \geq p_{i-1}$ 且
 $p_i \geq \beta_1^{(i)} \geq \beta_2^{(i)} \geq \dots \geq \beta_\ell^{(i)} \geq p_{i-1}$.

(To be continued)

$$(3) \quad \alpha_1^{(k)} \geq \alpha_2^{(k)} \geq \cdots \geq \alpha_\ell^{(k)} \geq p_{k-1} \text{ 且} \\ \beta_1^{(k)} \geq \beta_2^{(k)} \geq \cdots \geq \beta_\ell^{(k)} \geq p_{k-1}.$$

$$(4) \quad \text{若 } \ell(\alpha^{(k)}) = 1, \text{ 则 } \alpha_1^{(k)} = p_{k-1};$$

$$\text{若 } \ell(\alpha^{(k)}) > 1, \text{ 则 } \alpha_1^{(k)} = \alpha_2^{(k)};$$

$$\text{若 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) = 1, \text{ 则 } \beta_1^{(k)} = p_{k-1};$$

$$\text{若 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) \geq 2, \text{ 则 } \beta_1^{(k)} = \beta_2^{(k)};$$

$$\text{若 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) = 0, \text{ 则 } p_{k-1} = \max\{\alpha_1^{(k-1)}, \beta_1^{(k-1)}\}.$$

由此公式，我们可以给出了 $\mu_{2k}(n)$ 计数的组合物体。

定理 [陈永川, 季青, 沈一颖, 2013]

$\mu_{2k}(n)$ 等于 n 的 $(k+1)$ -marked Dyson symbols的个数。

下表列举35个 5 的 2-marked Dyson symbols, 可以验算 $\mu_2(5) = 35$.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ (1 & 1 & 1 & 1) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} (1) \\ (1) \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} (2 & 2) \\ & 1 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{c} 2 \\ (1) \end{array} \begin{array}{c} (2) \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} & & (1) \\ (1 & 1) & 1 \\ & & (1) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} (1 & 1) \\ 1 & (1 & 1) \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc} (1 & 1 & 1 & 1) \\ & & & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} & 1 \\ (2 & 2) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} (1 & 1) & (1) \\ & 1 & (1) \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{ccccc} & (1 & 1 & 1 & 1) \\ 1 & & & & \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} (1 & 1) & (1 & 1) \\ & 1 & & \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} & & (1) \\ (1 & 1 & 1) & 1 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cc} (2) & (1) \\ & 2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} & (1 & 1 & 1) \\ (1) & 1 & & \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} (1 & 1 & 1) & (1) \\ & 1 & & \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} (1) & & (1) & (1) \\ & 1 & & \\ & & (1) & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & & (1) & 1 & (1) \\ & 1 & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & (1) & (1) \\ & & 1 & & \\ (1) & (1) & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & (2) & (1) \\ 2 & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & (1) & 1 & (1) \\ 1 & & (1) & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & (1) & (1) \\ & 1 & & \\ (1) & & (1) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & (1) \\ (2) & 2 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & & (1) & \\ & 1 & & (1) & (1) \\ & & (1) & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & (1) & & \\ 1 & & (1) & 1 & (1) \\ & (1) & 1 & (1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (1) & 1 & 1 & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & & & \\ & 1 & & (1) & 1 & (1) \\ & & (1) & 1 & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & & \\ & & 1 & & (1) & (1) \\ (1) & (1) & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & (2) & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & (1) & & \\ & & 1 & (1) & (1) \\ & & & (1) & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & 1 & (1) \\ (1) & 1 & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2) & & \\ & 2 & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & \\ (1) & 1 & (1) & 1 & (1) \\ & & (1) & 1 & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & (1) \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & (1) \\ (1) & 1 & (1) & (1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \\ (2) & 2 & (1) \end{pmatrix}$$

$\mu_{2k}(n)$ 的无穷同余式

我们在 k -marked Dyson symbols定义full crank, 设 $NC_k(r, t; n)$ 表示full rank模 t 余 r , n 的 k -marked Dyson symbols的个数。我们证明了下面结果。

定理 [陈永川, 季青, 沈一颖, 2013]

给定素数 $p \geq 5$ 和正整数 r 和 $k \leq (p+1)/2$, 存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$, 使得对于任意 $0 \leq i \leq p^r - 1$,

$$NC_k(i, p^r; An + B) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

$\mu_{2k}(n)$ 的无穷同余式

由

$$\mu_{2k}(n) = \sum_{i=0}^{p^r-1} NC_{k+1}(i, p^r; n),$$

我们可以证明 $\mu_{2k}(n)$ 存在无穷多个同余式。

定理 [陈永川, 季青, 沈一颖, 2013]

对于给定正整数 $k \leq (p+1)/2$ 和素数 $p \geq 5$, 存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$, 使得

$$\mu_{2k}(An + B) \equiv 0 \pmod{p}.$$

spt-函数

在2008年, Andrews 发现2-阶cranks 和2-阶ranks的差始终是为正的。

定理 [Andrews, J. Reine Angew. Math., (2008)]

设spt-函数 $spt(n)$ 计数了 n 的分拆最小部分重复的次数, 则

$$spt(n) = \mu_2(n) - \eta_2(n) > 0,$$

								Total
$\lambda \in \mathcal{P}(5)$	(5)	(4, 1)	(3, 2)	(3, 1 ²)	(2 ² , 1)	(2, 1 ³)	(1 ⁵)	7
$n_s(\lambda)$	1	1	1	2	1	3	5	14

$$14 = spt(5) = \mu_2(5) - \eta_2(5) = 35 - 21 = 14.$$



G.E. Andrews, The number of smallest parts in the partitions of n , J. Reine Angew. Math. 624 (2008) 133–142.

spt-同余

G.E. Andrews 证明spt-函数与普通分拆函数一样，满足类似的拉马努金同余式。

$$spt(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

$$spt(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$spt(13n + 6) \equiv 0 \pmod{13}.$$

相继，包括美国数学家A. Folsom 和K. Ono在内一些数学家还发现该类函数存在许多更好的同余性质。



A. Folsom and K. Ono, The spt-function of Andrews, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105 (2008) 20152–20156.



K. Ono, Congruences for the Andrews spt function, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 108 (2011) 473–476.



S. Ahlgren, K. Bringmann and J. Lovejoy, l-adic properties of smallest parts functions, Adv. Math. 22 (2011) 629–645.

组合解释

在2011年, G.E. Andrews和F. Garvan等人给出定义在向量分拆上的spt-秩, 理论上证明了该统计量可以解释spt-函数的拉马努金同余式。

定义 (向量分拆)

n 的向量分拆 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 是由三对分拆组成, 其中

- (1) π_1 是每部分都不同的分拆。
- (2) π_1 的最小部分小于等于 π_2 的最小部分和 π_3 的最小部分。
- (3) $|\pi_1| + |\pi_2| + |\pi_3| = n$.

若对向量分拆 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 附权重 $\omega(\pi) = (-1)^{\ell(\pi_1)-1}$, 其中 $\ell(\pi_1)$ 为 π_1 的部分数。Andrews和Garvan证明了

$$\sum_{|\pi|=n} \omega(\pi) = \text{spt}(n).$$



G.E. Andrews, F.G. Garvan and J.L. Liang, Combinatorial interpretations of congruences for the spt-function, Ramanujan J. 29 (2012) 321–338.

向量分拆	$\omega(\pi)$	<i>spt</i> -分拆
$((1), (1), (1, 1))$	+1	(4)
$((1), \emptyset, (3))$	+1	(3, 1)
$((2, 1), \emptyset, (1))$	-1	(2, 2)
$((2), \emptyset, (2))$	+1	(2, 2)
$((1), (1, 1, 1), \emptyset)$	+1	(2, 1, 1)
$((1), \emptyset, (2, 1))$	+1	(2, 1, 1)
$((1), (2, 1), \emptyset)$	+1	(1, 1, 1, 1)
$((1), \emptyset, (1, 1, 1))$	+1	(1, 1, 1, 1)
$((1), (1, 1), (1))$	+1	(1, 1, 1, 1)
$((1), (3), \emptyset)$	+1	(1, 1, 1, 1)
$((2, 1), (1), \emptyset)$	-1	
$((2), (2), \emptyset)$	+1	
$((1), (2), (1))$	+1	
$((1), (1), (2))$	+1	
$((3, 1), \emptyset, \emptyset)$	-1	
$((4), \emptyset, \emptyset)$	+1	
16	10	10

向量分拆上的*spt*-秩

定义 [Andrews, Garvan and Liang, Ramanujan J. (2012)]

给定向量分拆 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ，它的*spt*-秩定义为 $\ell(\pi_2) - \ell(\pi_3)$ 。

令 $N_S(k, t, n)$ 表示所有满足*spt*-秩模 t 余 k 的 n 的向量分拆的权重之和。Andrews 和Garvan 等人证明了

$$N_S(k, 5, 5n + 4) = \frac{spt(5n + 4)}{5}, \quad \text{for } 0 \leq k \leq 4,$$

$$N_S(k, 7, 7n + 5) = \frac{spt(7n + 5)}{7}, \quad \text{for } 0 \leq k \leq 6,$$

从而有 $spt(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$ 以及 $spt(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}$ 。

向量分拆	$\omega(\pi)$	spt-秩模5	spt-分拆
$((1), (1), (1, 1))$	+1	4	(4)
$((1), \emptyset, (3))$	+1	4	(3, 1)
$((2, 1), \emptyset, (1))$	-1	4	(2, 2)
$((2), \emptyset, (2))$	+1	4	(2, 2)
$((1), (1, 1, 1), \emptyset)$	+1	3	(2, 1, 1)
$((1), \emptyset, (2, 1))$	+1	3	(2, 1, 1)
$((1), (2, 1), \emptyset)$	+1	2	(1, 1, 1, 1)
$((1), \emptyset, (1, 1, 1))$	+1	2	(1, 1, 1, 1)
$((1), (1, 1), (1))$	+1	1	(1, 1, 1, 1)
$((1), (3), \emptyset)$	+1	1	(1, 1, 1, 1)
$((2, 1), (1), \emptyset)$	-1	1	
$((2), (2), \emptyset)$	+1	1	
$((1), (2), (1))$	+1	0	
$((1), (1), (2))$	+1	0	
$((3, 1), \emptyset, \emptyset)$	-1	0	
$((4), \emptyset, \emptyset)$	+1	0	

问题

- (1) G.E. Andrews 和 F. Garvan 提出如何给出定义在 spt-分拆上的 spt-秩的问题。

G.E. Andrews, F.G. Garvan and J.L. Liang, Combinatorial interpretations of congruences for the spt-function, Ramanujan J. 29 (2012) 321–338.

- (2) 近期, G.E. Andrews, F. Dyson 和 R.C. Rhoades 给出定义在 spt-分拆的 spt-秩一些推断 (speculation), 并且在文中称寻找定义在 spt-分拆上 spt-秩问题仍然是有意思并且很有挑战性的问题。(It remains an interesting and apparently challenging problem to interpret the spt-crank in terms of ordinary integer partitions.)

G. E. Andrews, F.J. Dyson and R.C. Rhoades, On the distribution of the spt-crank, MDPI- Mathematics 1 (3) (2013) 76–88.

带标记的分拆

Andrews, Dyson and Rhoades 推断spt-秩的定义也许依赖于最小部分的尺寸，并且引入了带标记的分拆。

定义 [Andrews, Dyson and Rhoades, MDPI (2013)]

n 的标记分拆是 (λ, k) ,其中 λ 是个 n 的普通分拆, k 是一个用于标记最小部分的整数。

这里我们设 $\lambda_k = s(\lambda)$ 其中 $s(\lambda)$ 是 λ 的最小部分。



G. E. Andrews, F.J. Dyson and R.C. Rhoades, On the distribution of the spt-crank, MDPI- Mathematics 1 (3) (2013) 76–88.

例子

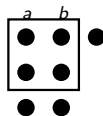
	$\lambda \in \mathcal{P}(4)$	$n_s(\lambda)$	(λ, k)
	(4)	1	$((4), 1)$
	(3, 1)	1	$((3, 1), 2)$
	(2, 2)	2	$((2, 2), 1), ((2, 2), 2)$
	(2, 1, 1)	2	$((2, 1, 1), 2), ((2, 1, 1), 3)$
	(1, 1, 1, 1)	4	$((1, 1, 1, 1), 1), ((1, 1, 1, 1), 2)$ $((1, 1, 1, 1), 3), ((1, 1, 1, 1), 4)$
Total	5	10	10

显然 n 的带标记分拆的个数为 $spt(n)$.

双标记的分拆

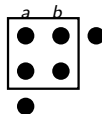
定义. n 的双标记分拆是一个三元组 (λ, a, b) , 其中

- λ 是 n 的普通分拆;
- $1 \leq a \leq d(\lambda)$ (Durfee square of λ 的长度);
- $a \leq b \leq \lambda_1$;
- $\lambda'_a = \lambda'_b$.



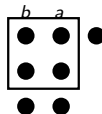
$((3, 2, 2), 1, 2)$

Doubly marked partition



$((3, 2, 1), 1, 2)$

Non-doubly marked partition



$((3, 2, 2), 2, 1)$

Non-doubly marked partition



William Y.C. Chen, Kathy Q. Ji, and Wenston J.T. Zang, The spt-crank for ordinary partitions, J. Reine Angew. Math., to appear.

例子

下表给出了10个4的单标记分拆和10个4的双标记分拆。

单标记分拆	双标记分拆
$((4), 1)$	$((1, 1, 1, 1), 1, 1)$
$((3, 1), 2)$	$((3, 1), 1, 1)$
$((2, 2), 1)$	$((2, 2), 1, 1)$
$((2, 2), 2)$	$((2, 2), 1, 2)$
$((2, 1, 1), 2)$	$((2, 1, 1), 1, 1)$
$((2, 1, 1), 3)$	$((2, 2), 2, 2)$
$((1, 1, 1, 1), 1)$	$((4), 1, 1)$
$((1, 1, 1, 1), 2)$	$((4), 1, 2)$
$((1, 1, 1, 1), 3)$	$((4), 1, 3)$
$((1, 1, 1, 1), 4)$	$((4), 1, 4)$

同时，我们在这两个集合上建立了一一对应。

双标记分拆上的 *spt-crank*

我们在双标记分拆上定义spt-秩。

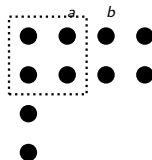
定义 [陈永川, 季青, 臧经涛, J. Reine Angew. Math. (2013)]

设 (μ, a, b) 是一个双标记的分拆。它的spt-秩定义 $d(\mu, a, b)$ 为:

$$d(\mu, a, b) = \mu'_a - \mu_{\mu'_a - a + 1} + b - 2a + 1.$$

例: 设 $((4, 4, 1, 1), 2, 3)$ 是10的双标记分拆, 则它的spt-秩为:

$$\begin{aligned} & d((4, 4, 1, 1), 2, 3) \\ &= \mu'_2 - \mu_{\mu'_2 - 2 + 1} + 3 - 4 + 1 \\ &= 2 - 4 + 3 - 4 + 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$



令 $M_S(i, t, n)$ 表示所有满足 *spt*-秩模 t 余 i 的 n 的双标记分拆 (λ, a, b) 。我们证明了

$$M_S(i, 5, 5n + 4) = \frac{spt(5n + 4)}{5}, \quad \text{for } 0 \leq i \leq 4,$$

$$M_S(i, 7, 7n + 5) = \frac{spt(7n + 5)}{7}, \quad \text{for } 0 \leq i \leq 6,$$

从而有 $spt(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$ 以及 $spt(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}$ 。

例子

这样借助于双标记分拆上spt-秩和双标记分拆和单标记分拆上的双射，可以 $5n + 4$ 的单标记分拆分拆为五等份， $7n + 5$ 的单标记分拆分拆为七等份。

(λ, k)	$(\mu, a, b) = \triangle(\lambda, k)$	$d(\mu, a, b)$	$d(\mu, a, b) \bmod 5$
$((4), 1)$	$((1, 1, 1, 1), 1, 1)$	3	3
$((3, 1), 2)$	$((3, 1), 1, 1)$	1	1
$((2, 2), 1)$	$((2, 2), 1, 1)$	0	0
$((2, 2), 2)$	$((2, 2), 1, 2)$	1	1
$((2, 1, 1), 2)$	$((2, 1, 1), 1, 1)$	2	2
$((2, 1, 1), 3)$	$((2, 2), 2, 2)$	-1	4
$((1, 1, 1, 1), 1)$	$((4), 1, 1)$	-3	2
$((1, 1, 1, 1), 2)$	$((4), 1, 2)$	-2	3
$((1, 1, 1, 1), 3)$	$((4), 1, 3)$	-1	4
$((1, 1, 1, 1), 4)$	$((4), 1, 4)$	0	0

Andrews-Dyson-Rhoades 猜想

猜想 [Andrews, Dyson and Rhoades, MDPI (2013)]

对于任意的 $n \geq 0$ 和 $m \geq 0$, 有

$$N_S(m, n) \geq N_S(m+1, n),$$

其中 $N_S(m, n)$ 计数了 spt -秩为 m 的 n 的向量分拆的个数, 在上篇文章中, 我们证明了 $N_S(m, n)$ 也计数了 spt -秩为 m 的 n 的双标记分拆的个数。



G.E. Andrews, F.J. Dyson and R.C. Rhoades, On the distribution of the spt -crank, MDPI-Mathematics, to appear.

例子

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1									
2	1	1								
3	1	1	1							
4	2	2	1	1						
5	2	2	2	1	1					
6	4	4	3	2	1	1				
7	5	4	4	3	2	1	1			
8	7	7	6	5	3	2	1	1		
9	10	9	8	6	5	3	2	1	1	
10	13	13	11	10	7	5	3	2	1	1

近似公式

Andrews, Dyson and Rhoades 得到了下面的近似公式，这个公式可以证实当 n 无穷大的时候是成立的。

定理 [Andrews, Dyson and Rhoades, MDPI (2013)]

For each $m \geq 0$, we have

$$N_S(m, n) - N_S(m+1, n) \sim \frac{(2m+1)\pi^2}{384\sqrt{3}n^2} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

符号

考虑下面两个分拆函数

- $N_{\leq m}(n)$ 表示 **ranks** 介于 $-m$ 和 m 间的 n 的分拆个数;
- $M_{\leq m}(n)$ 表示 **cranks** 介于 $-m$ 和 m 间的 n 的分拆个数。

我们有下面的关系式:

$$N_S(m, n) - N_S(m+1, n) = \frac{1}{2} (N_{\leq m}(n) - M_{\leq m}(n)).$$

猜想 [Andrews, Dyson and Rhoades, MDPI (2013)]

For $m \geq 0$ and $n \geq 0$, we have

$$N_{\leq m}(n) \geq M_{\leq m}(n).$$

高阶秩间的不等式

k 阶rank $N_k(n)$ 定义如下:

$$N_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^k N(m, n),$$

其中 $N(m, n)$ 表示rank为 m 的 n 的分拆个数。

k 阶crank $M_k(n)$ 定义如下:

$$M_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^k M(m, n),$$

其中 $M(m, n)$ 表示crank为 m 的 n 的分拆个数。

如前所述, Andrews发现2阶cranks与2阶ranks的差为正的。

$$spt(n) = \frac{1}{2}(M_2(n) - N_2(n)) > 0.$$

自然的问题是对于任意的 k , 是否有这样的关系?

$$M_k(n) - N_k(n) > 0.$$

高阶秩的另一种表示

定理 [陈永川, 季青, 臧经涛, 2013]

对于任意 $k \geq 1$ 和 $n \geq 1$, 有

$$N_k(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} (m^k - (m-1)^k) (p(n) - N_{\leq m-1}(n)),$$

$$M_k(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} (m^k - (m-1)^k) (p(n) - M_{\leq m-1}(n)).$$

这两个关系主要是利用Abel引理证明的。



William Y.C. Chen, Kathy Q. Ji, and Wenston J.T. Zang, Proof of the Andrews-Dyson-Rhoades conjecture on the spt-crank, submitted.
arXiv:1305.2116.

Garvan不等式

$$M_k(n) - N_k(n) = \sum_{m=1}^{n-1} (m^k - (m-1)^k)(N_{\leq m-1}(n) - M_{\leq m-1}(n)) \\ + n^k - (n-1)^k.$$

若Andrews-Dyson-Rhoades 猜想成立的话, 即

$$N_{\leq m-1}(n) - M_{\leq m-1}(n) \geq 0.$$

而对于 $m \geq 1$ 和 $k \geq 1$,

$$m^k - (m-1)^k > 0,$$

这样我们得到了对于 $n \geq 1$ 和 $k \geq 1$

$$M_k(n) - N_k(n) > 0.$$

秩集(Rank-set)

为了证明Andrews-Dyson-Rhoades 猜想, 我们给出利用Dyson的秩集的概念给出他们猜想另外一种等价形式。

定义 [Dyson, J. Combin. Theory A (1989)]

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ 的秩集(rank-set)定义为一无穷序列

$$[-\lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, j - \lambda_{j+1}, \dots, \ell - 1 - \lambda_\ell, \ell, \ell + 1, \dots].$$

例如, $(5, 5, 4, 3, 1)$ 的秩集为

$$[-5, -4, -2, 0, 3, 5, 6, 7, 8, \dots].$$



F.J. Dyson, Mappings and symmetries of partitions, J. Combin. Theory A 51 (1989) 169–180.

等价形式

我们引入两个函数

- $q(m, n)$ 表示秩集含有 m 的 n 的分拆的个数;
- $p(-m, n)$ 表示rank不小于 $-m$ 的 n 的分拆个数。

$$N_{\leq m}(n) - M_{\leq m}(n) = 2(p(-m, n) - q(m, n)).$$

定理 [陈永川, 季青, 臧经涛, 2013]

对于任意 $m \geq 0$ 和 $n \geq 1$, 有

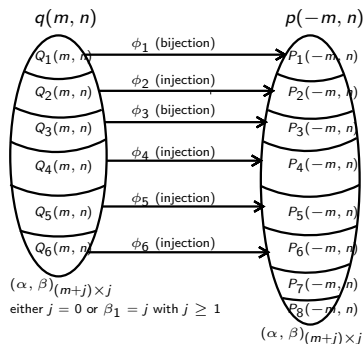
$$q(m, n) \leq p(-m, n).$$

证明主要思路

我们通过引入一个新的概念 m -Durfee rectangle symbols, 在这两个集合上构造一个单射证明该结论, 从而证明 Andrews-Dyson-Rhoades 猜想。这里根据 $m \geq 1$ 和 $m = 0$ 分为两种情况。

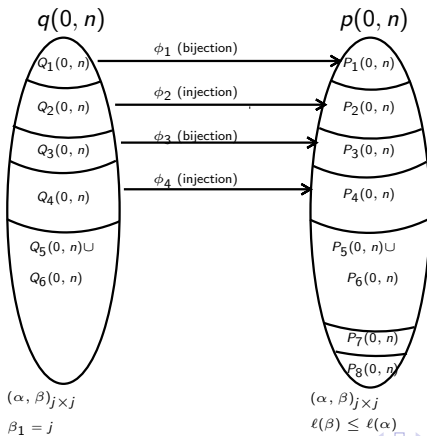
- $m \geq 1$. 我们先把被 $q(m, n)$ 计数的集合分拆分为六个不交子集 $Q_i(m, n)$ ($1 \leq i \leq 6$); 再把被 $p(-m, n)$ 计数的集合分拆分为八个不交子集 $Q_i(m, n)$ ($1 \leq i \leq 6$); 然后在前六个子集合里分别建立单射。

$m \geq 1$ 情况



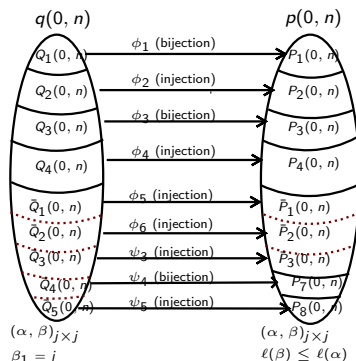
$m = 0$ 情况

$m = 0$ 情况会更复杂一些。首先我们发现前四个单射是可以用于 $m = 0$ 情况。但是第五个单射 ϕ_5 和第六个单射 ϕ_6 就不可以用了。



$m = 0$ 情况

这样，我们需要将 $Q_5(0, n) \cup Q_6(0, n)$ 分为五个不交子集 $\bar{Q}_i(0, n)$ ($1 \leq i \leq 5$)，把 $P_5(0, n) \cup P_6(0, n)$ 分为三个不交子集合 $\bar{P}_i(0, n)$ ($1 \leq i \leq 3$)。然后在分别建立五个单射。所以对于 $m = 0$ 情况，共有9个单射组成。



谢谢！