

分拆函数的 *Ramanujan* 同余性质

季青

南开大学组合数学中心

2013年11月15日

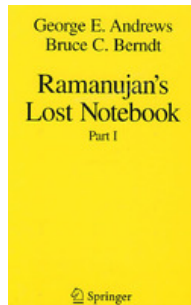
印度天才数学家 *Srinivasa Ramanujan* (1887-1920)



- Ramanujan 出生于印度一个贫穷的家庭，他没有受过严格的数学训练，却独立发现了将近3900个数学公式。后来被Hardy发现，深受震撼之余，出资赞助他到英国继续他的数学研究。
- Ramanujan 被誉为“印度之子”，与诗人泰戈尔并驾齐驱成为印度最受尊敬和爱戴的人物。
- Hardy亲自设计出一种计算一个人数学天分的评分表，他自己得了25分，Littlewood得了30分，同时代最伟大的德国数学家Hilbert得了80分，而Ramanujan则得了满分100分。

Ramanujan “丢失的笔记本”

在1976年，美国数学学会会长（2009–2010），美国科学院院士George E. Andrews 在英国剑桥大学图书馆发现了Ramanujan的一些失散的笔记本，其数学价值引起世人注意。一些数学家全面收集了Ramanujan的已发表和未发表的论文、手稿、笔记、札记及与Hardy 等人的通信等材料，将它们统称为Ramanujan“丢失的笔记本”，并加以系统研究公开出版，自上世纪末起已经出版了五卷。



整数分拆

定义

权重为 n 的整数分拆指的是一个有限的非增的正整数序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n$.

例：权重为4的整数分拆有5个，分别是

$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1).$$

设 $p(n)$ 表示权重为 n 的整数分拆个数，那么 $p(4) = 5$ 。这里我们将重点考察这个分拆函数 $p(n)$ 。

整数分拆的生成函数

定理(Euler)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n)q^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j}.$$

证明:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= (1 + q^1 + q^{1+1} + q^{1+1+1} + \dots) \\ &\quad \times (1 + q^2 + q^{2+2} + q^{2+2+2} + \dots) \\ &\quad \times (1 + q^3 + q^{3+3} + q^{3+3+3} + \dots) \\ &\quad \times \dots\dots\dots \\ &= \sum_{n=0} (\dots\dots\dots) q^n \end{aligned}$$

前面的系数就等于丢番图方程 $1j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots = n$ 的解的个数。而且我们将很容易发现每个解对应一个权重为 n 的分拆，故该命题得证。

分拆函数 $p(n)$

下面我们展开该生成函数，可以发现

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 \\ &\quad + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + 56q^{11} + 77q^{12} \\ &\quad + 101q^{13} + 135q^{14} + 176q^{15} + 231q^{16} + 297q^{17} \\ &\quad + 385q^{18} + 490q^{19} + 627q^{20} + 792q^{21} + 1002q^{22} \\ &\quad + 1255q^{23} + 1575q^{24} + 1958q^{25} + 2436q^{26} \\ &\quad + 3010q^{27} + 3718q^{28} + \dots + 204226q^{50} + \dots\end{aligned}$$

随着权重 n 的增大，分拆函数 $p(n)$ 增加的非常快！

$$p(n) \pmod{5}$$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 \\ &\quad + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + 56q^{11} + 77q^{12} \\ &\quad + 101q^{13} + 135q^{14} + 176q^{15} + 231q^{16} + 297q^{17} \\ &\quad + 385q^{18} + 490q^{19} + 627q^{20} + 792q^{21} + 1002q^{22} \\ &\quad + 1255q^{23} + 1575q^{24} + 1958q^{25} + 2436q^{26} \\ &\quad + 3010q^{27} + 3718q^{28} + \dots \end{aligned}$$

$$p(n) \pmod{5}$$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 \\ &\quad + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + 56q^{11} + 77q^{12} \\ &\quad + 101q^{13} + 135q^{14} + 176q^{15} + 231q^{16} + 297q^{17} \\ &\quad + 385q^{18} + 490q^{19} + 627q^{20} + 792q^{21} + 1002q^{22} \\ &\quad + 1255q^{23} + 1575q^{24} + 1958q^{25} + 2436q^{26} \\ &\quad + 3010q^{27} + 3718q^{28} + \dots \end{aligned}$$

定理(Ramanujan)

对于任意的非负整数 n , 我们有

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

$$p(n) \pmod{7}$$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 \\ &\quad + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + 56q^{11} + 77q^{12} \\ &\quad + 101q^{13} + 135q^{14} + 176q^{15} + 231q^{16} + 297q^{17} \\ &\quad + 385q^{18} + 490q^{19} + 627q^{20} + 792q^{21} + 1002q^{22} \\ &\quad + 1255q^{23} + 1575q^{24} + 1958q^{25} + 2436q^{26} \\ &\quad + 3010q^{27} + 3718q^{28} + \dots \end{aligned}$$

定理(Ramanujan)

对于任意的非负整数 n , 我们有

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$p(n) \pmod{11}$$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 \\ &\quad + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + 56q^{11} + 77q^{12} \\ &\quad + 101q^{13} + 135q^{14} + 176q^{15} + 231q^{16} + 297q^{17} \\ &\quad + 385q^{18} + 490q^{19} + 627q^{20} + 792q^{21} + 1002q^{22} \\ &\quad + 1255q^{23} + 1575q^{24} + 1958q^{25} + 2436q^{26} \\ &\quad + 3010q^{27} + 3718q^{28} + \dots \end{aligned}$$

定理(Ramanujan)

对于任意的非负整数 n , 我们有

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Ramanujan分拆同余式

Ramanujan发现了下面的三个同余式:

定理([Ramanujan, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1919)])

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \quad (1)$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}, \quad (2)$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}. \quad (3)$$

1. Ramanujan [Proc. Cambridge Philos. Soc., (1919)] 给出了同余式(1)和(2)的初等证明。
2. 而模11的同余式的证明首次是由物理学家Winkler [J. Combin. Theory, (1969)]给出, 他的证明方法主要是基于Macdonald关于李代数 B_2 的一个恒等式。

Freeman Dyson



- Freeman Dyson, 美籍英裔数学物理学家, 普林斯顿高等研究院教授, 曾获得洛伦兹奖(1966)和蒲朗克奖(1969)。Dyson星球理论提出者。
- 当Dyson还是高二学生的时候(1941年), 他从Hardy和Wright合写的《An introduction to the theory of numbers》书中知道了Ramanujan同余式。原本他尝试着给出Ramanujan模11同余式的基本证明, 但是没有成功。不过他发现一个问题是Ramanujan的证明是无法解释的。

Dyson关于模5的问题

关于Ramanujan模5的同余式，Dyson提出了这样一个问题

Dyson的问题

如何将权重为 $5n + 4$ 的分拆分成五份，使得每一份中分拆个数都相等？

- Dyson希望能够换找到一个分拆上的统计量，使得根据这个统计量可以将权重为 $5n + 4$ 的分拆分成具有相同数目的五大份。
- 在1944年，Dyson在剑桥上大二的时候，他才完成这个心愿，找到这个“统计量”，并命名为“rank”。

Dyson的rank及Dyson猜想

定义 (Rank)

对于一个分拆 λ , 它的rank ($r(\lambda)$)定义为它的最大部分减去它的部分数。

例如, $\lambda = (5, 4, 2, 1, 1, 1)$, $r(\lambda) = 5 - 6 = -1$ 。

Dyson的猜想1 (Freeman Dyson, Eureka, (1944))

设 $N(j, 5; n)$ 表示权重为 n , rank模5同余 j 的分拆个数, 则

$$\begin{aligned} N(1, 5; 5n + 4) &= N(2, 5; 5n + 4) = N(3, 5; 5n + 4) \\ &= N(4, 5; 5n + 4) = N(5, 5; 5n + 4). \end{aligned}$$

例子

	$n = 4$ ($p(4) = 5$)	$n = 9$ ($p(9) = 30$)
$N(1, 5; n)$	(3, 1)	(8, 1), (5, 2, 1 ²), (4 ² , 1) (4, 3, 2), (3, 1 ⁶), (2 ³ , 1 ³)
$N(2, 5; n)$	(1, 1, 1, 1)	(6, 1 ³), (5, 3, 1), (5, 2 ²) (3, 2, 1 ⁴), (2 ⁴ , 1), (1 ⁹)
$N(3, 5; n)$	(4)	(9), (6, 2, 1), (5, 4) (4, 1 ⁵), (3 ² , 1 ³), (3, 2 ² , 1 ²)
$N(4, 5; n)$	(2, 1, 1)	(7, 1 ²), (6, 3), (4, 2, 1 ³) (3 ² , 2, 1), (3, 2 ³), (2, 1 ⁷)
$N(5, 5; n)$	(1, 1, 1, 1)	(7, 2), (5, 1 ⁴), (4, 3, 1 ²) (4, 2 ² , 1), (3 ³), (2 ² , 1 ⁵)

Dyson的猜测

Dyson同时还发现这个统计量同样也适用模7的情形。

Dyson的猜想2 (Freeman Dyson, Eureka, (1944))

设 $N(j, 7; n)$ 表示权重为 n , 秩模7同余 j 的分拆个数, 则

$$\begin{aligned} N(1, 7; 7n+5) &= N(2, 7; 7n+5) = N(3, 7; 7n+5) = N(4, 7; 7n+5) \\ &= N(5, 7; 7n+5) = N(6, 7; 7n+5) = N(7, 7; 7n+5). \end{aligned}$$

但是他并不知道该如何去证明这两个猜想?

Dyson关于“crank”的猜测

Dyson还发现这个统计量并不适用模11的情形。

$$p(6) = 11,$$

$ \lambda = 6$	$r(\lambda)$	$r(\lambda) \pmod{11}$
(6)	5	5
(5, 1)	4	4
(4, 2)	2	2
(4, 1 ²)	1	1
(3, 3)	1	1
(3, 2, 1)	0	0
(3, 1 ³)	-1	10
(2, 2, 2)	-1	10
(2, 2, 1 ²)	-2	9
(2, 1 ⁴)	-3	8
(1 ⁶)	-5	6

Dyson的猜想4 (Freeman Dyson, Eureka, (1944))

一定存在一个类似于“rank”的统计量，但是也许要更深奥一些，假设称它为“crank”。用 $M(j, 11; n)$ 表示权重为 n ，“crank”模11同余 j 的分拆个数，则

$$M(j, 11; 11n + 6) = M(11 - j, 11; 11n + 6)$$

$$\begin{aligned} M(0, 11; 11n + 6) &= M(1, 11; 11n + 6) = M(2, 11; 11n + 6) \\ &= M(3, 11; 11n + 6) = M(4, 11; 11n + 6) \\ &= M(5, 11; 11n + 6). \end{aligned}$$

Andrews-Garvan的crank

这个猜测直到44年以后才被美国数学家Andrews和Garvan解决。

定义 (G. E. Andrews and F. G. Garvan, Bull. Am. Math. Soc., (1988))

对于一个分拆 λ ，它的“crank” $c(\lambda)$ 定义为

$$c(\lambda) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{if } n_1(\lambda) = 0, \\ \mu(\lambda) - n_1(\lambda) & \text{if } n_1(\lambda) > 0. \end{cases}$$

其中 $n_1(\lambda)$ 指的是分拆 λ 中部分为1的个数； $\mu(\lambda)$ 指的是分拆 λ 中部分大于 $n_1(\lambda)$ 的个数。

例如，对于 $\lambda = (5, 3, 2, 1, 1, 1)$ ，它的“crank”为 $\mu(\lambda) - n_1(\lambda) = 1 - 3 = -2$ 。

例子

$$p(6) = 11$$

λ	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 11$
$(5, 1)$	0	0
$(3, 2, 1)$	1	1
(2^3)	2	2
(3^2)	3	3
$(4, 2)$	4	4
(1^6)	-6	5
(6)	6	6
$(2, 1^4)$	-4	7
$(3, 1^3)$	-3	8
$(2^2, 1^2)$	-2	9
$(4, 1^2)$	-1	10

George E. Andrews和Frank Garvan还发现统计量“crank”不仅对于模11情形是成立，而且对模5和7的情形都是成立的。参见F. Garvan, Trans. Am. Math. Soc., (1988)和G.E. Andrews and F.G. Garvan, Bull. Am. Math. Soc., (1988)。

$ \lambda = 4$	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 5$	$ \lambda = 5$	$c(\lambda)$	$c(\lambda) \bmod 7$
$(3, 1)$	0	0	$(4, 1)$	0	0
(1^4)	-4	1	$(2^2, 1)$	1	1
(2^2)	2	2	(1^5)	-5	2
$(2, 1^2)$	-2	3	$(3, 2)$	3	3
(4)	4	4	$(2, 1^3)$	-3	4
			(5)	5	5
			$(3, 1^2)$	-1	6

总结

1. Andrews 和Garvan关于Dyson “crank” 的猜想的证明是采用代数的方法。他们的证明主要是基于在有理数域上极小多项式的性质及一些 q 级数恒等式。
- 2 Dyson 始终没有找到关于“rank”两个猜想的证明。这两个猜想的证明最后有两位英国数学家Atkin and Swinnerton-Dyer [Proc. Lond. Math. Soc. III. Ser., (1954)]给出。他们的证明是解析的，特别是在他们的证明过程中，他们还发现了许多mock theta function等式。

重述Dyson的问题

到目前为止，看似Dyson的所有问题和猜测都得到了圆满的解决，其实不然。

Dyson的问题

如何将权重为 $5n + 4$ 的分拆分成五类，使得每一类中分拆的个数都相等？

正如前面所述，Dyson发现了“rank”，Andrews和Garvan发现了“crank”，它们都可以将权重为 $5n + 4$ 的分拆分为五个具有相同分拆个数的等价类。既然每个等价类具有相同多的分拆个数，那么**组合学家们必然要问这样一个问题。**

组合证明

组合问题

这五个等价类究竟是按什么方式加以对应的呢？它们之间的映射究竟是什么？

组合证明

组合问题

这五个等价类究竟是按什么方式加以对应的呢？它们之间的映射究竟是什么？

这个问题于1990年被美国数学家Frank Garvan, Dongsu Kim,和Dennis Stanton解决（*Invent. Math.*, (1990)）。

1. 他们主要应用了群表述论中的经典映射Littlewood映射；
2. 文中的等价类既没有按照Dyson的“rank”加以分类，也没有按照Andrews-Garvan的“crank”加以分类。他们又提出了一种新的分类方式，称为“5-core crank”，由于它的定义涉及Littlewood映射，这里就不加以表述了。

Ramanujan的预言

Ramanujan在发现上面三个同余式后预言的同余式将会非常稀有。

$$p(\ell n + t) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{对所有 } n.$$

Ramanujan曾做出这样的猜测：

Ramanujan的预言([Ramanujan, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1919), p.xix])

It appears that there are no equally simple properties for any moduli involving primes other than these three (i.e. $\ell = 5, 7, 11$). (除了上述三个同余式以外 ($\ell = 5, 7, 11$), 不存在模其他任意素数的同余式。)

Ramanujan的预言

在1992年, 德国数学家Kimming 和丹麦数学家Olsson 利用模形式中滤子等工具证实

定理 ([Kimming-Olsson, Arch. Math. (1992)])

对于任意一个素数 ℓ 而言, 如果存在某个整数 β_ℓ , 有

$$p(\ell n + \beta_\ell) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{对于所有 } n,$$

那么,

$$24\beta_\ell \equiv 1 \pmod{\ell}.$$

例如, $\beta_5 = 4$, 这是因为 $24 \times 4 = 96 = 95 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$.

最近, 美国数学家Ahlgren 和Boylan ([Ahlgren-Boylan, Invent. Math. (2003)]) 基于Kimming-Olsson的工作, 利用模形式的线性空间的基证实了Ramanujan的预言。

Ramanujan同余式及其他同余式

定义 (Ramanujan同余式)

设 ℓ 为任意素数, 我们称下面的同余式为Ramanujan同余式

$$p(\ell n + t) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{对所有 } n.$$

考虑分拆函数 $p(n)$ 是否具有下面这样的同余式:

$$p(A n + B) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{对于所有 } n.$$

注意: 这里 A 不一定为素数 ℓ .

其他同余式

- 在1967年，美国数学家Atkin和O'Brien ([Trans. Amer. Math. Soc. (1967)]) 才找到关于模13的同余式。

$$p(157525693n + 111247) \equiv 0 \pmod{13}.$$

- 从1967年到2000年，研究学者就没有再发现模其他素数的同余式了。

存在无穷多个同余式

美国Emory大学的A.G. Candler教授Ken Ono（美国数学会学报（Proc. AMS）的主编及美国数学会公告（Bull. AMS）的副主编）借助于模形式理论中Serre定理证明

定理[Ono, Ann. Math. (2000)]

对于任意素数 $\ell \geq 5$ ，都有下面这样的同余式

$$p(An + B) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

- 借助于Ono提出的方法，Weaver (Ramanujan J. (2001))发现了模 $13 \leq \ell \leq 31$ 的76,065个同余式。
- Ahlgren (Math. Ann. (2000)) 推广了Ono的方法证明对于任意一个与6互素正整数 m ，存在无穷多个上述同余式。

无穷同余式子的同余解释

年轻数学家K. Mahlburg发现利用Andrews-Garvan-Dyson的crank概念可以给出由Ono 得到无穷多个同余式的组合解释。

定理(Mahlburg, PNAS (2005))

给定正整数 τ 和 r , 及素数 $p \geq 5$, 则存在无穷多个不覆盖算术级数 $An + B$ 使得对于任意 $0 \leq m \leq p^r - 1$, 有

$$M(m, p^r; An + B) \equiv 0 \pmod{p^\tau},$$



K. Mahlburg, Partition congruences and the Andrews-Garvan-Dyson crank, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 102 (2005) 15373–15376.

高阶rank和crank

最近, Atkin 和Garvan引入了高阶rank和crank的概念, 该概念在更深入地研究分拆同余的性质是非常有帮助的。

定义[Atkin and Garvan, Ramanujan J. (2003)]

$N_k(n)$ (k 阶rank) 定义为

$$N_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^k N(m, n),$$

$M_k(n)$ (k 阶crank) 定义为

$$M_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^k M(m, n).$$

这里 $N(m, n)$ 表示权重为 n , rank 为 m 的分拆个数; $M(m, n)$ 表示权重为 n , crank 为 m 的分拆个数。

k-marked Durfee symbols

为了给出 $N_k(n)$ 的组合解释, Andrews 引入了下面的概念

定义[George E. Andrews, Invent. Math. (2007)]

权重为 n 的 *k*-marked Durfee symbol 是由 k 对分拆和一个下标组成的, 其定义如下:

$$\eta = \left(\begin{array}{cccc} \alpha^k, & \alpha^{k-1}, & \dots, & \alpha^1 \\ \beta^k, & \beta^{k-1}, & \dots, & \beta^1 \end{array} \right)_D,$$

其中 α^i (resp. β^i) 表示一个分拆; $\sum_{i=1}^k (|\alpha^i| + |\beta^i|) + D^2 = n$. 而且分拆 α^i 和 β^i 必须满足下面三个条件:

- (1) 对于 $1 \leq i < k$, α^i 必须是非空的分拆, 而 α^k 和 β^i 可以为空集;
- (2) 对于 $2 \leq i \leq k$, 有 $\beta_1^{i-1} \leq \alpha_1^{i-1} \leq \beta_{l(\beta^i)}^i$;
- (3) $\beta_1^k, \alpha_1^k \leq D$.

k -marked Durfee symbols上的rank的定义

Andrews 也给出了 k -marked Durfee symbols上“rank” 的定义.

定义[George E. Andrews, Invent. Math. (2007)]

设 $\eta = \begin{pmatrix} \alpha^k, & \alpha^{k-1}, & \dots, & \alpha^1 \\ \beta^k, & \beta^{k-1}, & \dots, & \beta^1 \end{pmatrix}_D$ 是 k -marked Durfee symbol.

分拆对 $\begin{pmatrix} \alpha^i \\ \beta^i \end{pmatrix}$ 称为 η 的第 i 个向量。 η 的第 i 个rank $\rho_i(\eta)$ 定义为

$$\rho_i(\eta) = \begin{cases} l(\alpha^i) - l(\beta^i) - 1 & 1 \leq i < k, \\ l(\alpha^k) - l(\beta^k) & i = k. \end{cases}$$

例如, $\begin{pmatrix} 4_3 & 4_3 & 3_2 & 3_2 & 2_2 & 2_1 \\ & 5_3 & & 3_2 & 2_2 & 2_1 \end{pmatrix}_5$ 是一个权重

为55的3-marked Durfee symbol, 其中第一个rank为-1, 第二个rank为0, 第三个rank为1.

生成函数

基于 q 级数中著名的变换公式（ k -fold generalization of Watson's q -analog of Whipple's theorem），Andrews 给出了 k -marked Durfee symbols 的生成函数：

定理[George E. Andrews, Invent. Math. (2007)]

设 $\mathcal{D}_k(m_1, m_2, \dots, m_k; n)$ 表示权重为 n ，第 i 个 rank 为 m_i 的 k -marked Durfee symbols 的个数，那么有

$$\sum_{m_1, \dots, m_k = -\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}_k(m_1, \dots, m_k; n) x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} q^n$$

$$= \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} q^{3n(n-1)/2 + kn} \frac{(1 + q^n)(1 - q^n)^2}{\prod_{j=1}^k (1 - x_j q^n)(1 - \frac{q^n}{x_j})}.$$

组合解释

定义(k 阶对称rank)

k 阶对称rank ($\eta_k(n)$) 定义为

$$\eta_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} N(m, n),$$

它是 k 阶rank ($N_k(n)$) 的线性组合。

由rank的对称性 $N(-m, n) = N(m, n)$, 可以推知

$$\eta_{2k+1}(n) = 0.$$

基于上述生成函数, Andrews 给出关于 k 阶对称rank的组合解释:

定理[George E. Andrews, Invent. Math. (2007)]

$\eta_{2k}(n)$ 等于权重为 n 的 $(k+1)$ -marked Durfee symbols的个数。.

比如我们总共有21个权重为5的2-marked Durfee symbols.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & 1_2 & 1_2 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & 1_1 \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1
 \end{array}$$

分拆同余式

Andrews而且发现了 k -marked Durfee symbols 具有下面的同余式:

定理[George E. Andrews, Invent. Math. (2007)]

$$\mathcal{D}_3(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$\mathcal{D}_3(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$\mathcal{D}_5(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

其中 $\mathcal{D}_k(n)$ 表示权重为 n 的 k -marked Durfee symbols的个数。

借助于 k -marked Durfee symbols的full rank的概念, Andrews给出了上述同余式的组合解释。

最近, Bringmann, Garvan 和Mahlburg 发现 k -marked Durfee symbols的full rank的概念还可以用于解释下面关于对称rank的无穷同余式。

定理[Bringmann, Garvan and Mahlburg, Int. Math. Res. Not. (2009)]

对于给定的正整数 k, j 和素数 $Q > 3$, 存在无穷多个不覆盖的算术级数 $An + B$ 使得

$$\eta_{2k}(An + B) \equiv 0 \pmod{Q^j}.$$



K. Bringmann, F. Garvan and K. Mahlburg, Partition statistics and quasiweak Maass forms, Int. Math. Res. Not. (2009) 63–97.

一个分拆恒等式

最近, 我们借助于[组合构造](#)的方法得到了关于 k -marked Durfee symbols 的分拆恒等式。

定理[季青, Trans. AMS, (2011)]

对于 $k \geq 2$, we have

$$\mathcal{D}_k(m_1, m_2, \dots, m_k; n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k-2}{k-2} N\left(\sum_{i=1}^k |m_i| + 2j + k - 1; n\right).$$

注: 基于上述恒等式, 我们可以导出Andrews关于 k -marked Durfee symbols 的所有结果, 从而系统地解决了Andrews在《Invent. Math.》提出的8个公开问题。



季青, The combinatorics of k -marked Durfee symbols, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 987–1005.

回顾

定义(k 阶对称rank)

k 阶对称rank ($\eta_k(n)$) 定义为

$$\eta_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} N(m, n),$$

它是 k 阶rank ($N_k(n)$) 的线性组合。

由rank的对称性 $N(-m, n) = N(m, n)$, 可以推知

$$\eta_{2k+1}(n) = 0.$$

回顾

定义(k 阶对称rank)

k 阶对称rank ($\eta_k(n)$) 定义为

$$\eta_k(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} N(m, n),$$

这个新定义的对称奇数阶rank就不为零了;
而且它们之间还有下面的关系。

$$\eta_{2k}(n) = 2\bar{\eta}_{2k}(n) + \bar{\eta}_{2k-1}(n).$$

$\bar{\eta}_k(n)$ 的组合解释

定理(陈永川、季青、沈一颖, (2013))

对于给定整数 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq k + 1$, $\bar{\eta}_{2k-1}(n)$ 等于权重为 n , 第 i 个rank为零的 $(k + 1)$ -marked Durfee symbols的个数。

定理(陈永川、季青、沈一颖, (2013))

对于给定整数 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq k + 1$, $\bar{\eta}_{2k}(n)$ 等于权重为 n , 第 i 个rank为正的 $(k + 1)$ -marked Durfee symbols的个数。

由 $(k + 1)$ -marked Durfee symbols的rank的对称性可知,

定理(陈永川、季青、沈一颖, (2013))

对于给定整数 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq k + 1$, $\bar{\eta}_{2k}(n)$ 等于权重为 n , 第 i 个rank为负的 $(k + 1)$ -marked Durfee symbols的个数。



W.Y.C. Chen, K.Q. Ji, and E.Y.Y. Shen, On the positive moments of ranks, arXiv: 1310.8556.

$\bar{\eta}_1(5) = 7$	$\bar{\eta}_2(5) = 7$	$\bar{\eta}_2(5) = 7$
$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \\ & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \\ & & 1_1 & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & \\ & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & \\ & & & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} & & & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & 1_2 & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & \\ & & 1_1 & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & & \\ & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & & 1_1 & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} & 1_1 & & \\ 1_2 & & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & & 1_1 & \\ 1_2 & 1_2 & & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & & \\ 1_2 & & & 1_1 \end{array} \right)_1$
$\left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \\ & & & \end{array} \right)_2$	$\left(\begin{array}{cccc} & & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & & \end{array} \right)_1$	$\left(\begin{array}{cccc} & & 1_1 & \\ 1_2 & 1_2 & & 1_1 \end{array} \right)_1$

高阶对称crank

为了研究高阶rank和高阶crank之间不等关系，最近，Garvan[Adv. Math. (2011)] 在高阶crank的基础上引入了高阶对称的crank。

定义(k 阶对称crank)

k 阶对称crank ($\mu_k(n)$) 定义为

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \binom{m + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}{k} M(m, n),$$

它是 k 阶crank ($M_k(n)$) 的线性组合。



F. G. Garvan, Higher order spt-functions, Adv. Math. 228 (2011) 241–265

k-marked Dyson bipartitions

我们引入下面新的分拆概念，该概念是Dyson分拆的*k*-维推广。

定义(*k*-marked Dyson bipartitions)

权重为*n*的*k*-marked Dyson bipartition 是由*k*个分拆对和*k* - 1个正整数组成的，其定义如下：

$$\eta = \left(\begin{array}{ccccccc} \alpha^{(k)}, & & \alpha^{(k-1)}, & & \dots, & & \alpha^{(1)} \\ & p_{k-1}, & & p_{k-2}, & \cdots & p_1 & \\ \beta^{(k)}, & & \beta^{(k-1)}, & & \dots, & & \beta^{(1)} \end{array} \right),$$

其中分拆 α^i 和 β^i 必须满足下面三个条件：

- (1) $p_{k-1} \geq p_{k-2} \geq \cdots p_1 \geq p_0 = 1$.
- (2) $p_i \geq \alpha_1^{(i)} \geq \alpha_2^{(i)} \geq \cdots \geq \alpha_\ell^{(i)} \geq p_{i-1}$ and $p_i \geq \beta_1^{(i)} \geq \beta_2^{(i)} \geq \cdots \geq \beta_\ell^{(i)} \geq p_{i-1}$.

(To be continued)

$$(3) \quad \alpha_1^{(k)} \geq \alpha_2^{(k)} \geq \cdots \geq \alpha_\ell^{(k)} \geq p_{k-1} \text{ and} \\ \beta_1^{(k)} \geq \beta_2^{(k)} \geq \cdots \geq \beta_\ell^{(k)} \geq p_{k-1}.$$

$$(4) \quad \text{如果 } \ell(\alpha^{(k)}) = 1, \text{ 那么 } \alpha_1^{(k)} = p_{k-1};$$

$$\text{如果 } \ell(\alpha^{(k)}) > 1, \text{ 那么 } \alpha_1^{(k)} = \alpha_2^{(k)};$$

$$\text{如果 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) = 1, \text{ 那么 } \beta_1^{(k)} = p_{k-1};$$

$$\text{如果 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) \geq 2, \text{ 那么 } \beta_1^{(k)} = \beta_2^{(k)};$$

$$\text{如果 } \ell(\alpha^{(k)}) = 0 \text{ 和 } \ell(\beta^{(k)}) = 0, \text{ 那}$$

$$\text{么 } p_{k-1} = \max\{\alpha_1^{(k-1)}, \beta_1^{(k-1)}\}.$$



陈永川、季青、沈一颖, k -Marked Dyson Symbols and Congruences for Moments of Cranks, preprint.

组合解释

基于之前的组合构造，我们给出关于 k 阶对称crank的组合解释：

定理[陈永川、季青、沈一颖, (2013)]

$\mu_{2k}(n)$ 等于权重为 n 的 $(k+1)$ -marked Dyson bipartitions 的个数。

注：Andrews用于发现 k 阶对称rank组合解释的方法并不适用于给出 k 阶对称crank的组合解释。

We exhibit the 35 2-marked Dyson bipartitions of 5.

$$\begin{array}{lll}
 \left(\begin{array}{ccccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \\ 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1_2 & 1_1 & \\ 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \\ 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{ccccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 \\ 1_1 & 1_1 & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & 1_2 & & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \\ 1_1 & & & \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & 1_2 & 1_2 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & & & \\ 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccccc} 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_2 & 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & & & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cc} 1_2 & 1_1 \\ 1_2 & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccc} 2_1 & 2_1 & 1_1 \\ & & \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{cc} 2_1 & \\ 2_1 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{ccc} 2_2 & 2_2 & 1_1 \\ & & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cc} 1_1 & \\ 2_2 & 2_2 \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 2_2 & 2_1 & 1_1 \\ & & \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cc} 2_2 & 2_1 \\ & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cc} 2_1 & 1_1 \\ 2_2 & \end{array} \right)_0 \\
 \left(\begin{array}{cc} 2_1 & \\ 2_2 & 1_1 \end{array} \right)_0 & \left(\begin{array}{cc} 2_1 & 1_1 \\ \underline{2_1} & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ \underline{1_1} & & & \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & \\ 1_1 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ \underline{1_1} & & & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ 1_2 & 1_1 & \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1_2 & 1_1 & 1_1 \\ 1_1 & 1_1 & \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & 1_1 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1_2 & 1_2 & 1_1 & 1_1 \\ \underline{1_1} & & & \end{array} \right)_1 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & \\ 1_2 & 1_2 & 1_1 \end{array} \right)_1 & \left(\begin{array}{ccc} 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ \underline{1_1} & \underline{1_1} & \end{array} \right)_2 &
 \end{array}$$

关于 $\mu_{2k}(n)$ 的无穷同余式

我们在 k -marked Dyson symbol 定义了full crank。设 $NC_k(r, t; n)$ 表示权重为 n ，full rank模 t 同余为 r 的 k -marked Dyson symbols的个数。我们证明了下面的结果。

定理(陈永川、季青、沈一颖, (2013))

对于给定的正整数 k, τ 和素数 $p \geq 5$, 存在无穷多个不覆盖的算术计数 $An + B$, 使得对于任意 $0 \leq i < j \leq p - 1$,

$$NC_k(i, p; An + B) \equiv NC_k(j, p; An + B) \pmod{p^\tau}.$$

关于 $\mu_{2k}(n)$ 的无穷同余式

由上述结果，我们可以导出无穷多个关于 $\mu_{2k}(n)$ 的同余式：

定理(陈永川、季青、沈一颖，(2013))

对于给定的正整数 k 和素数 $p \geq 5$ ，存在无穷多个不覆盖的算术计数 $An + B$ ，使得

$$\mu_{2k}(An + B) \equiv 0 \pmod{p}.$$

还有什么值得研究的？

1. 分拆函数模2和3的同余式
2. Rank与crank的不等关系

最近，Garvan证实了高阶rank与高阶crank之间有这样的大小关系

定理 [Garva, Adv. Math. (2011)]

对于所有 $k \geq 1$ 和 $n \geq 1$ ，我们有

$$M_{2k}(n) > N_{2k}(n).$$

而由我们之前的组合构造可知，高阶rank和crank与普通的rank与crank之间有着密切的关系，由此断言普通的rank与crank间必存在某种大小关系。



陈永川、季青、臧静涛, Proof of the Andrews-Dyson-Rhoades conjecture on the spt-crank, arXiv: 13052116.

Stanely分拆函数

在2005年，美国科学院院士R.P. Stanely（2006年数学家大会一小时报告人）在研究偏序集上符号平衡上发现这样一个特殊的分拆函数：

定义(Stanely, Adv Appl Math. (2005))

Stanely分拆函数 $t(n)$ 定义为权重为 n 的分拆 λ 的个数，其中该分拆的奇数部分的个数与其共轭的奇数部分的个数模4同余。

例如 $n = 5$

λ	(5)	(4, 1)	(3, 2)	(3, 1 ²)	(2 ² , 1)	(2, 1 ³)	(1 ⁵)
λ'	(1 ⁵)	(2, 1 ³)	(2 ² , 1)	(3, 1 ²)	(3, 2)	(4, 1)	(5)

因此， $t(5) = 5 < p(5) = 7$.

Stanely分拆函数

美国科学院院士G.E. Andrews 利用 q 级数恒等式得到了 $t(n)$ 的封闭公式，并且发现它满足Ramanujan模5的分拆同余式：

定理[G.E. Andrews, Electron. J. Combin. (2004)]

对于所有 n ，我们有

$$t(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}.$$

最近，我和陈永川教授及学生给出了 $t(n)$ 一种新的组合解释，并且发现了下面的结果。

定理[W.Y.C. Chen, Kathy Q. Ji, Electron. J. Combin. (2010)]

对于所有 n ，我们有

$$t(n) \equiv p(n) \pmod{2}.$$

还有什么值得研究的？

事实上，Andrews给出的关于 $t(n)$ 模5的同余式可以认为是Ramanujan分拆同余式的限制形式。那么一个很自然的问题是：

问题

Ramanujan模7和11的分拆同余式的限制形式是什么呢？

还有什么值得研究的？

1. 分拆函数模2和3的同余式;
2. Rank与crank的不等关系;
3. Ramanujan同余式模7和11的限制形式;
4. 与仿 θ 函数间的关系;

还有什么值得研究的？

1. Weighted forms of Ramanujan's partition congruences;
2. Ramanujan同余式模7和11的限制形式;
3. 与仿 θ 函数间的关系;
4. 如何利用模形式理论得到分拆函数更深刻的结果。

总结

Ramanujan discovered so much, and yet he left so much more in his garden for other people to discover. —Freeman Dyson

(Ramanujan 不仅自己发现了很多东西，也在他的花园里留下了很多东西让别人去发现。)

谢谢！