

关于McKean-Vlasov 随机系统的若干问题

王凤雨¹

1. 天津大学应用数学中心, 天津300072

E-mail: wangfy@tju.edu.cn

收稿日期: 2023-XX-XX; 接受日期: 2023-XX-XX; 网络出版日期: 2023-XX-XX

国家重点研发项目(批准号: 2022YFA1006000)资助

摘要 McKean-Vlasov随机系统包括分布依赖随机微分方程与平均场粒子系统, 是随机分析领域的研究热点之一, 在偏微分方程、动力系统、数学物理、最优控制等领域有重要应用. 本文介绍关于这类随机系统研究的若干前沿问题, 供有兴趣的同行学者参考, 包括: 具有超奇异交互作用的平均场粒子系统的混沌传播、分布依赖随机微分方程的正则性与遍历性、粒子系统的泛函不等式及其应用、分布依赖随机微分方程经验分布的Wasserstein 极限等.

关键词 McKean-Vlasov随机系统 混沌传播 正则性 遍历性 经验分布

MSC (2020) 主题分类 60H30

1 引言

根据M. Kac[27, 28]于1950年代所提出的使用Vlasov动力学理论与混沌传播来描述Boltzmann方程的思想, H. McKean [30, 31] 对于一类正则的平均场粒子系统证明了混沌传播, 并引入分布依赖随机微分方程(自相互作用随机系统)来刻画非线性Fokker-Planck 方程. 此后, 关于平均场粒子系统的混沌传播和分布依赖随机微分方程的研究受到越来越多人的关注, 逐渐形成了概率论与相关领域的研究热点.

设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上所有Borel概率测度所组成的空间, 赋予弱拓扑. 考虑如下分布依赖的二阶椭圆微分算子:

$$L_\mu = \frac{1}{2} \text{tr}\{a(\cdot, \mu) \nabla^2\} + b(\cdot, \mu) \cdot \nabla, \quad \mu \in \hat{\mathcal{P}}$$

其中 $\hat{\mathcal{P}}$ 为 $\mathcal{P}$ 的一个稠密子空间,

$$a: \mathbb{R}^d \times \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \quad b: \mathbb{R}^d \times \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

英文引用格式: Wang F Y. Some Problems on McKean-Vlasov Stochastic Systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1–18, doi: 10.1360/SSM-2022-XXXX

为可测映射。为简单记, 本文只考虑时齐情形, 即 a, b 不依赖于时间参数 t 。

对于 $\mu \in \mathcal{P}$ 以及 $f \in L^1(\mu)$, 记 $\mu(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$. 上述的分布依赖算子对应于非线性Fokker-Planck方程

$$\partial_t \mu_t = L_{\mu_t}^* \mu_t, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

其解 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为 $\hat{\mathcal{P}}$ 上的弱连续轨道, 使得任给 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 有 $L_{\mu_s} f \in L^1(\mu_s)$ (a.e. $s \geq 0$), $\mu \cdot (L_{\mu} f) \in L_{loc}^1([0, \infty))$, 且

$$\mu_t(f) = \mu_0(f) + \int_0^t \mu_s(L_{\mu_s} f) ds, \quad t \geq 0.$$

易见, 由分布积分, 方程(1.1)的解满足

$$\mu_t(f_t) = \mu_0(f_0) + \int_0^t \mu_s(L_{\mu_s} f_s + \partial_s f_s) ds, \quad t \geq 0, \quad f \in C_0^\infty([0, t] \times \mathbb{R}^d).$$

如果密度 $\rho_t := \frac{d\mu_t}{dx}$ 存在, 则方程(1.1)转化为

$$\partial_t \rho_t = L_{\rho_t}^* \rho_t, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

其中 $L_{\rho_t}^*$ 为 $L_{\rho_t} := L_{\rho_t(x)dx}$ 关于 $L^2(dx)$ 的伴随(adjoint)算子。

为使用概率方法研究非线性Fokker-Planck方程(1.1)或(1.2), 考虑如下的分布依赖随机微分方程

$$dX_t = b(X_t, \mathcal{L}_{X_t}) dt + \sigma(X_t, \mathcal{L}_{X_t}) dW_t, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

其中 W_t 为完备滤波概率空间 $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 m 维Brown运动, $\mathcal{L}_{X_t} \in \mathcal{P}$ 为 X_t 的分布, 可测映射

$$\sigma : \mathbb{R}^d \times \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$$

满足 $\sigma \sigma^* = a$. 方程(1.3)的解是指 $\mathbb{R}^d$ 上适应的连续随机过程 X_t , 满足 $\{\mathcal{L}_{X_t} : t \geq 0\} \subset \hat{\mathcal{P}}$, 且

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbb{E}[\|\sigma(X_s, \mathcal{L}_{X_s})\|^2 + |b(X_s, \mathcal{L}_{X_s})|] ds < \infty, \\ & X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, \mathcal{L}_{X_s}) ds + \int_0^t \sigma(X_s, \mathcal{L}_{X_s}) dW_s, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{aligned}$$

由Itô公式, 如果 X_t 为(1.3)的解, 则 $\mu_t := \mathcal{L}_{X_t}$ 为(1.1)的解。反之, 由叠加原理[3], 如果(1.1)的解 μ_t 满足

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \{\|\sigma(\cdot, \mu_s)\|^2 + |b(\cdot, \mu_s)|\} d\mu_s < \infty, \quad t \geq 0,$$

则可构造完备滤波概率空间以及之上的 m 维Brown运动 W_t , 使得方程(1.3)具有以 μ_0 为初分布的解 X_t 使得 $\mathcal{L}_{X_t} = \mu_t, t \geq 0$.

如果分布依赖随机微分方程(1.3)对于所有初分布 $\mu \in \hat{\mathcal{P}}$ 是适定的, 则令 X_t^μ 是以 μ 为初分布的解, 并定义

$$P_t^* \mu := \mathcal{L}_{X_t^\mu}, \quad t \geq 0, \quad \mu \in \hat{\mathcal{P}}.$$

此时 X_t^μ 关于时间具有无记忆性, 即马氏性, 而关于初分布 μ 是非线性的, 即 P_t^* 满足流性质

$$P_{t+s}^* \mu = P_t^* P_s^* \mu, \quad t, s \geq 0, \quad \mu \in \hat{\mathcal{P}},$$

但通常

$$P_t^* \mu \neq \int_{\mathbb{R}^d} (P_t^* \delta_x) \mu(dx), \quad t > 0,$$

这里 δ_x 为 x 处的Dirac测度。从而 X_t^μ 被McKean称为非线性马氏过程。

为使用线性马氏过程来刻画非线性Fokker-Planck方程(1.1)以及分布依赖随机微分方程(1.3), 考虑 $\mathbb{R}^d$ 上具有 $N(\geq 2)$ 个粒子的平均场粒子系统 $X_t^N = (X_t^{N,i})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{Nd}$:

$$dX_t^{N,i} = b(X_t^{N,i}, \mu_t^N)dt + \sigma(X_t^{N,i}, \mu_t^N)dW_t^i, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.4)$$

其中 $(W_t^i)_{1 \leq i \leq N}$ 为独立的 m 维Brown运动, $(X_0^i)_{1 \leq i \leq N}$ 为 $\mathcal{F}_0$ 可测的独立同分布随机变量, 其分布为 $\mu_0 \in \hat{\mathcal{P}}$, 且

$$\mu_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{N,i}}$$

为粒子系统的经验分布。在适当的条件下, 方程(1.4)是适定的, 其解为经典的线性马氏过程, 且当 $N \rightarrow \infty$ 时 μ_t^N 弱收敛到 X_t 的分布 $\mathcal{L}_{X_t}$, 从而(1.1)被视为当粒子数趋于无穷时, 单个粒子的极限演化系统。通过使用Kac的混沌传播思想, 这样的性质已经被严格证明。

在本文的余下部分, 介绍关于平均场粒子系统与分布依赖随机微分方程研究中的一些前沿问题, 供有兴趣的同行学者参考。限于作者的学识能力, 难免挂一漏万, 甚至存在理解上的偏差, 恳请读者批评指正。

2 Kac混沌传播

当系统中的粒子独立同分布时, 不同的粒子处于完全相同的独立地位, 这属于极端的无序状态, 所以被Kac称为“混沌”。粒子系统具有混沌性质, 是指当粒子数趋于无穷时, 系统中的粒子逐渐变成独立同分布的状态。而混沌传播是指, 当粒子数趋于无穷时, 随着时间演化的粒子系统将初始时刻的混沌现象传播到了任意时刻。

定义2.1 (Kac混沌) 设对于每个 $N \geq 2$, $\{X^{N,i}\}_{1 \leq i \leq N}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上 N 个随机变量(N 个随机粒子的位置), 其联合分布具有可交换性, 即: 任给 $(1, \dots, N)$ 的一个重排 $(i_1, \dots, i_N)$, 有

$$\mathcal{L}_{(X^{N,i_1}, \dots, X^{N,i_N})} = \mathcal{L}_{(X^{N,1}, \dots, X^{N,N})}.$$

如果当 $N \rightarrow \infty$ 时, 任给 $k \in \mathbb{N}$ 有弱收敛

$$\mathcal{L}_{(X^{N,1}, \dots, X^{N,k})} \rightarrow \mu_0^{\otimes k},$$

其中 $\mu_0^{\otimes k}$ 为某概率测度 $\mu_0 \in \mathcal{P}$ 的 k 次独立乘积, 则称该粒子系统为混沌的。

显然, 前面所说的独立同分布的随机变量族 $\{X_0^{N,i} = X_0^i\}_{N \geq 2, 1 \leq i \leq N}$ 是Kac混沌系统的一个特例。

定义2.2 (Kac混沌传播) 设 $\{X_t^{N,i}\}_{1 \leq i \leq N, N \geq 2, t \geq 0}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上粒子系统的随机演化过程, 如果初始系统 $\{X_0^{N,i}\}_{1 \leq i \leq N, N \geq 2}$ 是混沌的, 则任给 $t > 0$ 时刻的系统 $\{X_t^{N,i}\}_{1 \leq i \leq N, N \geq 2}$ 也是混沌的, 这样的性质称为粒子系统的混沌传播。

关于混沌传播的研究已经非常多。简言之, 当系数 b, σ 满足一定条件时, 可以确定空间 $\hat{\mathcal{P}}$ 使得方程(1.1)和(1.3)适定, 且相应的平均场粒子系统具有混沌传播性质。特别的, 对于独立同分布的初值 $\{X_0^{N,i} = X_0^i\}_{N \geq 2, 1 \leq i \leq N}$, $\mathcal{L}_{X_0^{N,i}} = \mathcal{L}_{X_0} = \mu_0 \in \hat{\mathcal{P}}$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时有

$$\mathcal{L}_{(X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,k})} \rightarrow \mu_t^{\otimes k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

其中 $(X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,N})$ 为平均场粒子系统(1.4)的解, μ_t 为(1.1)的解。

除了定性刻画, 文献中也给出了混沌传播的定量估计, 即估计当 $N \rightarrow \infty$ 时(2.1)中弱收敛的收敛速度。用来描述收敛速度的方式包括概率距离、相对熵或Fisher信息。下面仅对于 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度介绍这几个量, 对于 N 个粒子系统, 只需将 $\mathbb{R}^d$ 换成 $\mathbb{R}^{Nd}$ 。

任给 $p \in [0, \infty)$, p 阶Wasserstein距离定义为

$$\mathbb{W}_p(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^p \pi(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \right)^{\frac{1}{p+1}}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{P},$$

其中 $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ 为 μ 与 ν 的耦合(即联合分布)全体。在最优传输中, 这个量表示在 p 阶费用函数下分布 μ 与 ν 之间的最优传输费用。当 $p > 0$ 时, p 阶Wasserstein空间

$$\mathcal{P}_p := \{\mu \in \mathcal{P} : \mu(|\cdot|^p) < \infty\}$$

在 $\mathbb{W}_p$ 下是Polish(完备可分度量)空间, 后面我们会介绍Wasserstein空间上的微分结构。对于 $p = 0$, 令 $|x - y|^0 := 1_{x \neq y}$, 则 $\mathbb{W}_0$ 是全变差距离的一半:

$$2\mathbb{W}_0(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_{var} := \sup_{\|f\|_{\infty} \leq 1} |\mu(f) - \nu(f)|.$$

留意, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ 在 $\mathbb{W}_0$ 下是完备的但不可分。

另一个重要的量是相对熵, 它描述了一个分布 μ 相对于另一个分布 ν 的混沌程度:

$$\text{Ent}(\mu|\nu) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \log f \, \mathrm{d}\mu, & \text{若 } f := \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \text{ 存在,} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

而 μ 关于 ν 的Fisher信息为

$$I(\mu|\nu) := \begin{cases} \nu(f^{-1}|\nabla f|^2), & \text{若 } f := \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \text{ 存在,} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

为简单记, 下面仅考虑 $m = d, \sigma = \sigma_0 I_{d \times d}$ ($\sigma_0 > 0$ 为常数)且

$$b(x, \mu) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \mu(\mathrm{d}y) =: (K * \mu)(x), \quad (2.2)$$

这里 $K(x, y)$ 表示处于位置 x 与 y 的粒子之间的交互作用。于是, 粒子系统(1.1)和随机微分方程(1.3)被简化为

$$\mathrm{d}X_t^{N,i} = (K * \mu_t^N)(X_t^{N,i}) \mathrm{d}t + \sigma_0 \mathrm{d}W_t^i, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$dX_t = (K * \mathcal{L}_{X_t})(X_t)dt + \sigma_0 dW_t, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

当(2.4)中的Brown运动 $W_t = W_t^i$ 时, 将其解记为 X_t^i , 即:

$$dX_t^i = (K * \mathcal{L}_{X_t^i})(X_t^i)dt + \sigma_0 dW_t^i, \quad t \geq 0.$$

我们假设 $\{X_0^i\}_{i \geq 1}$ 独立且与 X_0 同分布, 从而 $\{(X_t^i)_{t \geq 0}\}_{i \geq 1}$ 为独立同分布的随机过程。

对于Lipschitz连续的卷积核 K , McKean[30] 已经证明了单个粒子在路径空间上混沌传播:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{N,1} - X_t^1|^2 \right] \leq \frac{C(T)}{N}, \quad T > 0, N \geq 2, \mathcal{L}_{X_0} \in \mathcal{P}_2,$$

其中常数 $C(T) \in (0, \infty)$ 不依赖于初分布。这里的收敛速度 N^{-1} 是最优的。文献[41]使用耦合方法重新证明了该结果。由此, 任给 $k \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k \sup_{t \in [0, T]} |X_t^{N,i} - X_t^i|^2 \right] \leq \frac{kC(T)}{N}, \quad T > 0, N \geq 2, \mathcal{L}_{X_0} \in \mathcal{P}_2,$$

从而得到路径空间上的混沌传播:

$$\mathbb{W}_2^{k,T}(\mathcal{L}_{(X^{N,1}, \dots, X^{N,k})_{0 \rightarrow T}}, \mathcal{L}_{X_{0 \rightarrow T}}^{\otimes k}) \leq \left(\frac{kC(T)}{N} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad T > 0, N \geq 2, \mathcal{L}_{X_0} \in \mathcal{P}_2, \quad (2.5)$$

其中

$$(X^{N,1}, \dots, X^{N,k})_{0 \rightarrow T} := (X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,k})_{t \in [0, T]}$$

是路径空间 $\mathcal{C}^{k,T} := C([0, T]; \mathbb{R}^{kd})$ 上的随机变量, 类似的, $X_{0 \rightarrow T} := (X_t)_{t \in [0, T]}$ 是 $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上的随机变量, 且

$$\mathbb{W}_2^{k,T}(\mu^{k,T}, \nu^{k,T}) := \inf_{\Gamma \in \mathcal{C}(\mu^{k,T}, \nu^{k,T})} \left(\int_{\mathcal{C}^{k,T} \times \mathcal{C}^{k,T}} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_t - \eta_t|^2 \right) \Gamma(d\xi, d\eta) \right)^{\frac{1}{2}}$$

是 $\mathcal{C}^{k,T}$ 上概率测度 $\mu^{k,T}$ 和 $\nu^{k,T}$ 之间的2阶Wasserstein距离。由 K 的Lipschitz性以及(2.5), 可以得到相对熵下的混沌传播: 存在常数 $C(T) > 0$ 使得

$$\text{Ent}(\mathcal{L}_{(X^{N,1}, \dots, X^{N,k})_{0 \rightarrow T}} | \mathcal{L}_{X_{0 \rightarrow T}}^{\otimes k}) \leq \frac{kC(T)}{N}, \quad N \geq k \geq 1.$$

关于混沌传播的研究情况可参考综述文献[7], 下面仅考虑 K 为奇异函数情形。

我们假设 K 满足

$$|K(x, y)| \leq \frac{\kappa}{|x - y|^\beta}, \quad x \neq y \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\kappa > 0, \beta \in (0, d)$ 为常数。因为椭圆型扩散过程的分布关于Lebesgue测度具有正的密度, $\beta < d$ 的假设是合理的, 否则(2.2)中的 $b(x, \mu)$ 对于 $\mu = \mathcal{L}_{X_t}$ 可能无定义。但在一定的假设下, 比如 $K(x, y) = K(x - y)$ 为反对称函数, 对于 $\beta \in [d, d + 1)$ 以及具有Hölder连续密度函数的测度 μ , $b(x, \mu)$ 是可以定义的, 见后面的问题2.1。下面介绍几个重要的交互作用函数 $K(x, y) = K(x - y), x \neq y$, 见[39]。

(1) **Coulomb/Newton 交互作用**。令 ω_d 为 d 维单位球的体积。Coulomb核作用

$$K_C(x) = \frac{x}{d\omega_d|x|^d}$$

刻画电荷之间的交互作用, 而Newton交互作用 $K_N = -K_C$ 刻画物体之间的引力作用。

(2) **Biot-Savart 交互作用**。设 s_{d-1} 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球面的面积。Biot-Savart核

$$K_{BS}(x) = \begin{cases} \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi|x|^2}, & \text{if } d = 2, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d, \\ \frac{x}{s_{d-1}|x|^d}, & \text{if } d \geq 3, \end{cases}$$

描述不可压流体中的交互作用。

(3) **Riesz交互作用**。设 $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}, \beta \in (0, d+1)$ 为常数。Riesz核

$$K_R = \frac{\kappa x}{|x|^\beta}$$

是Coulomb与Biot-Savart($d \geq 3$)核的推广形式。

当 $\beta < 1$ 时, 对于具有Riesz交互作用的平均场粒子系统, [18]证明了路径一致的混沌传播:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{N,1} - X_t^1|^p \right] = 0, \quad p \in (0, 2), T > 0.$$

对于2维Coulomb交互作用的系统, [5]证明了单个时刻在相对熵下的混沌传播:

$$\text{Ent}(\mathcal{L}_{(X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,k})}, \mathcal{L}_{X_t}^{\otimes k}) \leq k c e^{c\varepsilon^{-1}t^\varepsilon} \frac{\log N}{N}, \quad N \geq k \geq 1, t > 0, \varepsilon \in (0, 1),$$

其中常数 $c > 0$ 不依赖于 ε 。关于奇异交互作用系统混沌传播的更多研究, 可以见[5, 18]中的参考文献。此外, [26]还估计了具有 $W^{-1, \infty}$ 交互作用的平均场粒子系统的混沌传播。

问题2.1 研究具有超奇异的交互作用的模型, 比如在(2.2)中 $K(x, y) = K(x - y)$ 满足

$$K(-x) = -K(x), \quad |K(x)| \sim |x|^{-d-\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1).$$

该交互作用在0处比Riesz核更加奇异, 当 μ 具有 $(\alpha+)$ 阶Hölder连续的密度函数时, (2.2)中的 $b(x, \mu)$ 有定义。对于这类超奇异的交互作用核, 研究平均场粒子系统(2.3)的混沌传播, 以及分布依赖随机微分方程(2.4)的性质。

对于正则的交互作用粒子系统, 当单个粒子的演化受到耗散外力的作用时, 可以成立时间一致的混沌传播: 当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \left(\mathbb{E}[|X_t^{N,1} - X_t^1|^2] + \text{Ent}(\mathcal{L}_{X_t^{N,1}}, \mathcal{L}_{X_t}) \right) \rightarrow 0,$$

见[15, 37]及其文献。

问题2.2 对于具有耗散外力的奇异交互作用粒子系统, 比如在(2.3)中漂移项为 $K * \mu_t^N - \nabla V$, 其中 V 严格凸, 研究时间一致的混沌传播; 在正则交互作用情形, 估计全局路径一致混沌传播速度: 当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, \infty)} |X_t^{N,1} - X_t^1|^2 \right], \text{Ent}(\mathcal{L}_{X_{0 \rightarrow \infty}^{N,1}}, \mathcal{L}_{X_{0 \rightarrow \infty}}) \rightarrow 0.$$

当系统具有记忆时, 考虑路径依赖的粒子系统:

$$dX_t^{N,i} = \{H(X_{t-r \rightarrow t}^{N,i}, \mu_{t-r \rightarrow t}^N) + (K * \mu_t^N)(X_t^{N,i})\}dt + \sigma_0 dW_t^i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad t \geq 0,$$

其中 $r \in (0, \infty)$ 是一个常数(记忆长度),

$$X_{t-r \rightarrow t} \in \mathcal{C}(r) := C([-r, 0]; \mathbb{R}^d), \quad X_{t-r \rightarrow t}(s) = X_{t+s}, \quad s \in [-r, 0],$$

$$\mu_{t-r, t}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_{t-r \rightarrow t}^{N,i}},$$

且初值 $\{X_{-r \rightarrow 0}^{N,i} = X_{-r \rightarrow 0}^i\}_{1 \leq i \leq n}$ 为 $\mathcal{C}(r)$ 上独立同分布的随机变量。当 $K = 0$ 且

$$H : \mathcal{C}(r) \times \mathcal{P}_p(\mathcal{C}(r)) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Lipschitz连续时, 其中 $p \geq 1$, $\mathcal{P}_p(\mathcal{C}(r))$ 为 $\mathcal{C}(r)$ 上关于一致距离的 p 阶Wasserstein空间, 文[20]证明了路径一致的混沌传播:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{N,1} - X_t^1|^p \right] = 0, \quad T > 0.$$

如果 H 关于分布变量在全变差距离下是Lipschitz连续的, 该文还证明了全变差距离下的混沌传播。

问题2.3 研究具有奇异交互作用的路径依赖粒子系统的混沌传播; 研究具有无穷记忆($r = \infty$)粒子系统的混沌传播。

考虑随机Hamilton(动力学)系统: 在(1.1)和(1.4)中, 令 $d = 2m$ 且对于 $x = (z, v) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$\sigma = \text{diag}\{0, I_{m \times m}\}, \quad b(x, \mu) = (v, (K * \mu)(x)).$$

当 K 为Lipschitz连续函数时, [15]得到了 $\mathbb{W}_2$ 下的时间一致的精确混沌传播速度. 对于 K 属于适当的Besov空间, 且噪声为Brown运动或 α 稳定过程, [17]估计了将 K 渐近磨光后平均场粒子系统的路径一致混沌传播速度。

问题2.4 在上述问题中, 研究噪声为Lévy过程或具有退化Brown噪声的模型。

3 正则性

为使用概率方法刻画偏微分方程的正则性, Bismut[4]使用Malliavin分析建立了扩散半群导数的概率公式, 该形式的导数公式在文献中被称为Bismut公式。此外, 为估计半群的超压缩性和扩散过程的log-Sobolev不等式常数, 作者[43]发现了扩散半群的无穷维Harnack不等式, 此后又在[44]中

引入了较弱形式的log-Harnack不等式, 它们不仅能很好的刻画随机系统的正则性, 还在一定的框架下等价于Bakry-Emery的曲率下界条件以及相对熵-传输费用不等式等, 见[45]。Bismut公式以及无穷维Harnack 不等式已被大量应用于许多不同模型的研究。这里我们考虑分布依赖随机微分方程(1.4)的Bismut公式和log-Harnack 不等式。

假设分布依赖随机微分方程(1.3)对于分布 $\mu \in \mathcal{P}_2$ 是适定的, 记 $P_t^* \mu = \mathcal{L}_{X_t}$ 。我们刻画映射

$$\mu \mapsto P_t^* \mu, \quad t > 0$$

的正则性。由于 $P_t^* \mu$ 由其对于有界可测函数的积分所确定, 所以只需考虑 $\mathcal{P}_2$ 上的函数

$$\mathcal{P}_2 \ni \mu \mapsto P_t f(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} f d(P_t^* \mu), \quad t > 0, f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$$

的正则性。基于流的性质 $P_{t+s}^* = P_t^* P_s^*, s, t > 0$, 正则性可视为短时间性质, 所以我们仅考虑 $t \in [0, T]$, 其中 $T > 0$ 为固定常数。

在以下两个小节中, 我们分别关注具有奇异交互作用时 $P_t f$ 的log-Harnack不等式与Bismut型导数公式。当系数关于分布变量具有正则性时, 比如关于Wasserstein距离、加权变差距离具有Lipschitz性, 但容许关于空间变量奇异, 相关工作已经被总结在新近出版的专著[56] 中。

3.1 Log-Harnack不等式

我们研究分布依赖随机微分方程的如下的log-Harnack不等式

$$P_t \log f(\mu) \leq \log P_t f(\nu) + \frac{c}{t} \mathbb{W}_2(\mu, \nu)^2, \quad t \in (0, T], \mu, \nu \in \mathcal{P}_2, f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d),$$

其中 $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上有界正函数全体, $c > 0$ 为常数。该不等式等价于相对熵-传输费用不等式

$$\text{Ent}(P_t^* \mu | P_t^* \nu) \leq \frac{c}{t} \mathbb{W}_2(\mu, \nu)^2, \quad t \in (0, T], \mu, \nu \in \mathcal{P}_2. \quad (3.1)$$

留意, 这里的 t^{-1} 阶是最优的小时间估计。事实上, 由Pinsker不等式, (3.1)蕴含

$$\|DP_t f\|_\infty := \sup_{\mu \neq \nu} \frac{|P_t f(\mu) - P_t f(\nu)|}{\mathbb{W}_2(\mu, \nu)} \leq \left(\frac{2c}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty,$$

这里的 $t^{-\frac{1}{2}}$ 是椭圆扩散半群梯度估计中的最优小时间行为。

研究log-Harnack不等式的一个有效工具是作者[44]所发展的变测度耦合方法, 当噪声系数 σ 不同时依赖于分布和空间变量时, 该方法以被有效应用于包括漂移项 b 关于空间奇异、关于分布变量关于 $\mathbb{W}_2$ 距离Lipschitz连续的模型[24, 32, 51]。新近, 基于[35]所发展的双边耦合方法, 文[21]对于噪声同时依赖于空间变量和分布变量的模型建立了log-Harnack 不等式, 且容许漂移项中关于分布的依赖性弱于 $\mathbb{W}_2$ 之下的Lipschitz性, 即存在常数 $c > 0$ 使得

$$|b(x, \mu) - b(x, \nu)| \leq c(\mathbb{W}_2(\mu, \nu) + \mathbb{W}_\psi(\mu, \nu)),$$

其中 ψ 为Dini函数的平方根,

$$\mathbb{W}_\psi(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x - y|) \pi(dx, dy).$$

该条件已经比较接近于具有奇异交互作用的模型。最近, 我们[22]引入由局部可积函数诱导的概率距离来研究log-Harnack不等式, 覆盖了第2节所讨论的奇异交互作用模型, 且容许噪声系数依赖于空间变量(但不依赖于分布变量)。

问题3.1 对于具有奇异交互作用的分布依赖随机微分方程(1.3)建立log-Harnack不等式, 其中 b 包含奇异卷积

$$K * \mu := \int_{\mathbb{R}^d} K(\cdot, y) \mu(dy),$$

K 包含Coulomb/Biot-Savart/Riesz交互作用。当噪声系数 σ 不依赖于空间变量时, 我们[22]对于 $\beta < 1$ 的Riesz型交互作用建立了整体(即任意 $t \in (0, T]$)的log-Harnack不等式, 而对于其它情形建立了局部(即小时间)的log-Harnack不等式。一个挑战性的问题是如何对于噪声依赖于分布的具有奇异交互作用的模型建立log-Harnack不等式。这里容许噪声系数关于分布的依赖性正则的。

问题3.2 对于带延迟的模型, 当噪声不依赖于分布且系数关于分布依 $\mathbb{W}_2$ Lipschitz连续时, [23]建立了log-Harnack不等式。进一步研究噪声依赖于分布、具有奇异交互作用的带延迟模型的log-Harnack不等式。

3.2 Bismut 公式

我们先介绍关于概率分布的内蕴导数与外蕴导数, 它们分别描述粒子系统中粒子的“移动”与“生死”两种演化趋势。为简单记, 我们仅考虑 $\mathcal{P}_2$ 上函数的导数, 关于更广情形的研究见[2, 34, 61]。

定义3.1 设 $f : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, $\mu \in \mathcal{P}_2$.

(1) 如果

$$L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu) \ni \phi \mapsto D_\phi f(\mu) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\mu \circ (id + \varepsilon \phi)^{-1}) - f(\mu)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$$

是一个良定的有界线性泛函, 其中 $id : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是恒同算子,

$$(\mu \circ (id + \varepsilon \phi)^{-1})(A) := \mu(\{x : x + \varepsilon \phi(x) \in A\}),$$

则称 f 在 μ 处内蕴可导。此时, 存在唯一的 $Df(\mu) \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 使得

$$D_\phi f(\mu) = \langle Df(\mu), \phi \rangle_{L^2(\mu)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle Df(\mu), \phi \rangle(x) \mu(dx), \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu).$$

我们称 $L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 为 μ 处的切空间, $Df(\mu)$ 为 f 在 μ 处的内蕴导数。

(2) 如果任给 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$D^e f(\mu)(x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f((1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon \delta_x) - f(\mu)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$$

存在, 则称 f 在 μ 处外蕴可导, $D^e f(\mu) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 为外蕴导数。

直观上, $D_\phi f(\mu)$ 描述当粒子系统沿着向量场 ϕ 方向移动时, 在 f 下函数值的变化率; 而外蕴导数 $D^e f(\mu)(x)$ 刻画当系统在 x 处生出质量无穷小粒子 $\varepsilon \delta_x$, 同时原系统总体减少相同的无穷小质量 $\varepsilon \mu$, 在 f 下函数值的变化率。因此, 这两种导数分别刻画了粒子的运动和生死。

当 $\sigma(x, \mu) = \sigma(x)$ 不依赖于分布, 且 $b(x, \mu)$ 关于 x 具有某种局部可积性、关于 μ 内蕴可导时, 我们已经建立了Bismut 型内蕴导数公式(见[52]及其文献):

$$D_\phi P_t f(\mu) = \mathbb{E}[f(X_t)M_t^\phi], \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d), \quad t \in (0, T],$$

其中 X_t 是初分布为 μ 的方程(1.3)的解, M_t^ϕ 是一个显式构造的关于 ϕ 线性的鞅。新近, 文[25]在较弱的分布依赖性条件下建立了该公式, 而[33]则对于 $P_t f$ 的外蕴导数也建立了Bismut 型公式。

问题3.3 对于噪声依赖于分布的模型建立内蕴导数、外蕴导数的Bismut公式; 对于具有奇异交互作用的模型建立内蕴导数、外蕴导数的Bismut公式。

还可以进一步考虑带延迟的模型。对于噪声不依赖于分布、不包含延迟, 且漂移项为正则的情形, 文[2]对于窗口过程的半群建立了内蕴导数的Bismut公式。

问题3.4 对于带延迟的模型, 建立外蕴导数的Bismut公式; 对于噪声依赖于分布但不依赖于延迟、漂移项具有奇异交互作用的模型, 建立内、外蕴导数的Bismut公式。

问题3.5 在上述问题中, 研究带Lévy噪声的分布依赖随机微分方程的Bismut公式。文献[40]已经研究了系数正则的模型。

最后, 结合混沌传播与内蕴导数的Bismut公式, 我们考虑导数流的混沌传播。给定独立同分布的初值 $\{X_0^i\}_{i \geq 1}$, $\mu := \mathcal{L}_{X_0^i} \in \mathcal{P}_2$, $\{X_t^{N,i}\}_{1 \leq i \leq N}$ 为平均场粒子系统(1.4)。给定 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$, 以及 $\varepsilon \in (0, 1)$, 令 $\{X_t^{N,i,\varepsilon}\}_{1 \leq i \leq N}$ 是以 $\{X_0^i + \varepsilon \phi(X_0^i)\}_{i \geq 1}$ 为初值的平均场粒子系统, 而 $X_t^{i,\varepsilon}$ 为(1.3)中以 W_t^i 为噪声以 X_0^i 为初值的解。

问题3.6 在一定的条件下, 证明以下的导数流在 $L^1(\Omega \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^d), \mathbb{P})$ 中存在:

$$\begin{aligned} \nabla_\phi X_t^{N,i} &:= \lim_{\varepsilon \downarrow} \frac{X_t^{N,i,\varepsilon} - X_t^{N,i}}{\varepsilon}, \\ \nabla_\phi X_t^i &:= \lim_{\varepsilon \downarrow} \frac{X_t^{i,\varepsilon} - X_t^i}{\varepsilon}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

研究导数流的混沌传播

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\nabla_\phi X_t^{N,1} - \nabla_\phi X_t^1|^2 \right] = 0,$$

估计收敛速度。以此为基础, 研究当 $N \rightarrow \infty$ 时

$$\nabla P_t^{N1} f(\mu) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^{N,1,\varepsilon}) - f(X_t^{N,1})]}{\varepsilon}$$

的Bismut公式是否收敛, 如果是, 且其极限应该是 $P_t f(\mu)$ 的Bismut公式。

4 泛函不等式与遍历性

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上由 $L := \Delta - \nabla V$ 生成的扩散过程, 其中 V 是 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数使得 $\mu(dx) := e^{-V(x)} dx$ 为概

率测度。令 P_t 为相应的扩散半群。由谱理论, 对于常数 $\lambda > 0$, Poincaré 不等式

$$\mathrm{Var}_\mu(f) := \mu(f^2) - \mu(f)^2 \leq \frac{1}{\lambda} \mu(|\nabla f|^2), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d)$$

等价于 L 具有谱空隙 $\mathrm{gap}(L) \geq \lambda$, 以及 P_t 在 $L^2(\mu)$ 中指数式收敛

$$\|P_t - \mu\|_{L^2(\mu)} := \sup_{\|f\|_{L^2(\mu)} \leq 1} \|P_t f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \leq e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

此外, 对于常数 $\rho \in (0, \infty)$, log-Sobolev 不等式

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) := \mu(f^2 \log f^2) - \mu(f^2) \log \mu(f^2) \leq \frac{1}{\rho} \mu(|\nabla f|^2), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d)$$

等价于 P_t 的超压缩性[8, 13, 14]

$$\|P_t\|_{L^p(\mu) \rightarrow L^q(\mu)} := \sup_{\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1} \|P_t f\|_{L^q(\mu)} \leq 1, \quad q > p > 1, \quad t \geq \frac{1}{4\rho} \log \frac{q-1}{p-1},$$

以及在相对熵下的指数收敛性[1]

$$\mathrm{Ent}_\mu(P_t f) \leq e^{-4\rho t} \mathrm{Ent}_\mu(f), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d).$$

假设上面的常数 λ, ρ 都是最优的, 则[38]证明 $\lambda \geq 2\rho$, 且当存在 λ 所对应的特征函数 u 使得 $\mu(u^3) \neq 0$ 时有 $\lambda > 2\rho$.

当 Poincaré 不等式不成立时, 文献[36]引入了如下的弱 Poincaré 不等式来刻画半群慢于指数式的收敛速度:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \alpha(r) \mu(|\nabla f|^2) + r \Phi(f), \quad r > 0, f \in C^1(\mathbb{R}^d),$$

其中 $\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 称为速率函数, 当 $r \downarrow 0$ 时 $\alpha(r) \uparrow \infty$; 且

$$\Phi : L^2(\mu) \rightarrow [0, \infty]$$

使得 $\{f : \Phi(f) < \infty\}$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密, 以及

$$\Phi(cf) = c^2 \Phi(f), \quad \Phi(P_t f) \leq \Phi(f), \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad f \in L^2(\mu).$$

速率函数 α 对应于半群的如下收敛速度:

$$\sup_{\Phi(f) \leq 1} \|P_t f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \downarrow 0.$$

在给定的有限维情形, 通常取 $\Phi(f) = \|f\|_\infty^2$, 而对于无穷粒子系统, Φ 的选取要依据模型自身的性质, 参考早期的文献[29] 所选取的 Φ , 以研究的近邻交互作用粒子系统的代数式遍历性。

考虑分布依赖随机微分方程

$$dX_t = -\{V(X_t) + (K * \mathcal{L}_{X_t})(X_t)\}dt + \sqrt{2}dW_t, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

以及相应的平均场粒子系统

$$dX_t^{Ni} = -\{V(X_t^i) + (K * \mu_t^N)(X_t^i)\}dt + \sqrt{2}dW_t^i, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad N \geq 2, \quad (4.2)$$

其中 $\mu_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{N,i}}$, $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 为粒子的自身位势使得

$$\mu_V(dx) := \frac{e^{-V(x)}dx}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}dx} \in \mathcal{P},$$

$W \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ 为交合作用核. 在一定的条件下, 分布依赖随机微分方程(4.1)对于分布属于 $\mathcal{P}_2$ 是适定的, 且 N -粒子系统的Hamilton 量

$$H_N(x^N) := \sum_{i=1}^N V(x^{N,i}) + \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N W(x^{N,i}, x^{N,j}), \quad x^N = (x^{N,i})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{dN}$$

所对应的Gibbs 测度

$$G_N(dx^N) := \frac{1}{Z_N} e^{-H_N(x^N)} dx^N, \quad Z_N := \int_{\mathbb{R}^{dN}} e^{-H_N(x^N)} dx^N < \infty$$

满足一致的log-Sobolev不等式

$$\text{Ent}_{G_N}(f^2) \leq \frac{1}{\rho} G_N(|\nabla f|^2), \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^{dN}), N \geq 2, \quad (4.3)$$

其中 $\rho \in (0, \infty)$ 为常数. 则 X_t^N 的马氏半群 P_t^N 在相对熵下具有如下的指数收敛:

$$\text{Ent}_{G_N}(P_t^N f) \leq e^{-4\rho t} \text{Ent}_{G_N}(f), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^{dN}).$$

为刻画该不等式所蕴含的分布依赖随机微分方程的遍历性估计, 考虑系统的自由能:

$$E^{V,W}(\nu) := \text{Ent}(\nu|\mu_V) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} W(x-y) \nu(dx) \nu(dy), \quad \nu \in \mathcal{P}_2.$$

则

$$\text{Ent}^{V,W}(f) := E^{V,W}(\nu) - \inf_{\gamma \in \mathcal{P}} E^{V,W}(\gamma) \geq 0.$$

文献[16]证明, 有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Ent}_{G_N}(\nu^{\otimes N}) = \text{Ent}^{V,W}(\nu), \quad \nu \in \mathcal{P}_2,$$

其中从而 $\text{Ent}^{V,W}$ 被称为系统的平均场相对熵. 此外, 令 $P_t^* \nu = \mathcal{L}_{X_t}$, X_t 是以 ν 为初分布方程(4.1)的解, 且 $(P_t^N)^* \nu^{\otimes N} = \mathcal{L}_{X_t^N}$, $X_t^N = (X_t^{N,i})_{1 \leq i \leq N}$ 是初分布为 $\mathcal{L}_{X_0^N} = \nu^{\otimes N}$ 的平均场粒子系统(4.2) 的解. 为[16] 还证明

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Ent}_{G_N}((P_t^N)^* \nu^{\otimes N}) \geq \text{Ent}^{V,W}(P_t^* \nu), \quad t \geq 0, \nu \in \mathcal{P}_2.$$

从而一致的log-Sobolev 不等式(4.3) 蕴含分布依赖随机微分方程关于平均场相对熵指数遍历:

$$\text{Ent}^{V,W}(P_t^* \nu) \leq e^{-4\rho t} \text{Ent}^{V,W}(\nu), \quad t \geq 0, \nu \in \mathcal{P}_2.$$

当交合作用正则时, 关于分布依赖随机微分方程长时间行为的研究工作还包括在不同意义下的指数遍历性、Donsker-Varadhan 大偏差原理、快慢系统的平均化原理等, 见[19, 56]及所引文献.

问题4.1 寻找并证明平均场粒子系统的一致Poincaré不等式所蕴含的分布依赖随机微分方程的遍历性, 比如分布密度函数在在某种意义下的指数收敛性.

问题4.2 对于耗散项较弱的平均场粒子系统, 不成立一致的Poincaré不等式, 参照文献[29, 36], 建立一致的弱Poincaré 不等式, 刻画分布依赖随机微分方程的次指数式遍历性。

问题4.3 对于具有奇异交互作用的模型, 研究平均场粒子系统一致的泛函不等式, 并刻画相应的分布依赖随机微分方程的遍历性。

问题4.4 对于具有奇异交互作用的模型, 研究分布依赖随机微分方程的遍历性、Donsker-Varadhan大偏差原理, 建立快慢系统的平均原理。

5 噪声项具有奇异交互作用的分布依赖随机微分方程

前面所讨论的奇异交互作用, 仅存在于漂移项。而对于一些重要的物理模型, 奇异的交互作用也出现在噪声项, 即在(1.3)中 $b(x, \mu)$ 由奇异核 K 通过(2.2)来确定, 而噪声项由另一个奇异核 σ_0 所确定:

$$\sigma(x, \mu) = (\sigma_0 * \mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_0(x, y) \mu(dy).$$

一个典型的例子是3D齐次Landau方程(Bolthman方程的grazing collision极限): 在 $\mathbb{R}^3$ 上考虑概率密度函数 ρ_t 所满足的方程

$$\partial_t \rho_t = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} a(\cdot - z) (\rho_t(z) \nabla \rho_t - \rho_t \nabla \rho_t(z)) dz \right\},$$

其中对于常数 $\gamma \in [-3, 1]$,

$$a(x) := |x|^{2+\gamma} \left(I - \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

该方程所对应的分布依赖随机微分方程为

$$dX_t = (K * \mathcal{L}_{X_t})(X_t) dt + (\sigma_0 * \mathcal{L}_{X_t})(X_t) dW_t,$$

其中 W_t 为3维Brown运动, $K(x, y) = K(x - y)$, $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(x - y)$ 满足

$$K(x) := -2|x|^\gamma x, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\sigma_0(x) := |x|^{\frac{\gamma}{2}} \begin{pmatrix} x_2 & 0 & x_3 \\ -x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & -x_2 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

在正则情形, 即 $\gamma = 0$ (Maxwell molecules)和 $\gamma \in (0, 1]$ (hard potential)时, 已有大量的研究成果, 包括混沌传播、遍历性、Harnack 不等式等, 见[6, 9–11, 46]。当 $\gamma \in (-2, 0)$ (moderately soft potential)时, [12]得到了平均场粒子系统的混沌传播。在这些情况下, 噪声系数中的交互作用核 σ_0 至少是Hölder连续的, 奇异性比较弱。

问题5.1 研究噪声具有奇异交互作用的分布依赖随机微分方程, 刻画设定性、正则性、遍历性和混沌传播。特别的, 应用于强奇异 $\gamma \in [-3, -2]$ (soft potential)情形Landau方程所对应的分布依赖随机微分方程。

6 经验分布在Wasserstein距离下的收敛速度

马氏过程的经验分布是用来估计平稳分布的重要统计量。关于遍历马氏过程经验分布长时间行为的研究已有丰富的成果, 建立了强大数率、中心极限定理和大偏差、中偏差等, 见[59, 60]。近年来, 作者与合作者研究了马氏过程经验分布在Wasserstein距离下的收敛速度, 对于几类不同模型得到了收敛速度的精确估计, 并在低维情形得到了2阶Wasserstein距离的重整化极限, 见[42, 48–50, 53, 54, 57, 58], 以及综述文章[55]。

假设 M 为 d 维紧Riemann流形, X_t 为由 $L := \Delta + U$ 生成的扩散过程, 其中 Δ 为Laplace算子, U 为一个有界向量场。则该扩散过程是指数遍历的, 且存在 M 上的光滑函数 V 使得唯一的不变概率测度可表示为

$$\mu(dx) = e^{V(x)} dx,$$

这里 dx 表示 M 上的体积测度。则生成算子可分解为

$$L = \hat{L} + Z, \quad \hat{L} := \Delta + \nabla V, \quad Z := U - \nabla V,$$

其中对称部分 $\hat{L}$ 为 $L^2(\mu)$ 上自伴算子, 反对称部分 Z 关于 μ 的散度 $\operatorname{div}_\mu(Z) = 0$, 即:

$$\int_M \langle Z, \nabla f \rangle d\mu = 0, \quad f \in C^1(M).$$

根据强大数律和中心极限定理[59], 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 经验分布

$$\mu_t := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds$$

以概率1收敛到 μ , 且任给 $0 \neq f \in L^2(\mu)$, $\mu(f) = 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时弱收敛

$$\sqrt{t} \mu_t(f) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t f(X_s) ds \rightarrow N(0, 2\mathbf{V}(f))$$

成立, 其中 $N(0, 2\mathbf{V}(f))$ 表示均值为0、方差为 $2\mathbf{V}(f)$ 的正态分布,

$$\mathbf{V}(f) := \int_0^\infty \mu(f P_t f) dt \in (0, \infty).$$

设 ρ 为 M 上的Riemann距离, 任给 $p \in [1, \infty)$, 由 ρ 诱导的 p 阶Wasserstein距离定义为

$$\mathbb{W}_p(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \left(\int_{M \times M} \rho(x, y)^p \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ 是 μ 与 ν 的耦合全体。

设 $\{\lambda_i\}_{i \geq 0}$ 为自伴算子 $-\hat{L}$ 的所有特征值, 从小到大排列并记重数。熟知,

$$\lambda_i \asymp i^{\frac{2}{d}}, \quad i \geq 0,$$

其中 $A \asymp B$ 表示, 存在常数 $c \in (1, \infty)$ 使得两个非负变量 A 与 B 满足 $A \leq cB, B \leq cA$.

文献[57]证明, 对于所有的 $p \in [1, \infty)$ 以及 $q \in (0, \infty)$,

$$(\mathbb{E}[\mathbb{W}_p^q(\mu_t, \mu)])^{\frac{1}{q}} \asymp \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}, & \text{if } d \leq 3, \\ t^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\log t}, & \text{if } d = 4, \\ t^{-\frac{1}{d-2}}, & \text{if } d \geq 5 \end{cases}$$

对于 $t > 2$ 关于初分布一致成立。

文献[53]证明, 当维数 $d \leq 3$ 时, 重整化极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbb{E}[\mathbb{W}_2(\mu_t, \mu)^2] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{V}(Z\phi_i)\right)$$

对于初分布一致成立, 其中 ϕ_i 为 λ_i 对应的单位特征函数。而当 $Z = 0$ 时, [58]证明了弱收敛

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbb{W}_2^2(\mu_t, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\xi_i^2}{\lambda_i^2},$$

其中 $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ 为独立同分布的1维标准正态随机变量。

对于 $d = 4$ 情形, 文献[42]证明了重整化极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\log t} \mathbb{E}^\nu[\mathbb{W}_2(\mu_t, \mu)^2] = \frac{\text{vol}(M)}{8\pi^2}$$

对于初分布一致成立, 其中 $\text{vol}(M)$ 为 M 的体积。这个结果表明, $d = 4$ 时的重整化极限和漂移项无关。

文献[47, 50]研究了带杀死边界扩散过程的条件经验分布在 $\mathbb{W}_2$ 下的长时间行为。对于过程的生命时 ζ 与拟平稳分布 μ_0 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 文献[47]得到了 $\mathbb{W}_2(\mathbb{E}[\mu_t | t < \zeta], \mu_0)$ 的极限, 文献[50]给出了条件期望 $\mathbb{E}[\mathbb{W}_2(\mu_t, \mu_0)^2 | t < \zeta]$ 的精确收敛速度以及低维情形的重整化极限。

问题6.1 研究 $d \geq 5$ 情形的重整化极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{2}{d-2}} \mathbb{E}[\mathbb{W}_2^2(\mu_t, \mu)] = ?$$

如果极限不存在, 计算上、下极限。

问题6.2 对于杀死边界的扩散过程, 研究条件经验分布在 $\mathbb{W}_p(p \neq 2)$ 下的收敛速度。

问题6.3 考虑分布依赖的扩散过程 X_t , 其中向量场 Z 被替换为 $Z(X_t, \mathcal{L}_{X_t})$, 且对于不变测度 μ , $Z(\cdot, \mu)$ 是反对称的, 即满足 $\text{div}_\mu(Z(\cdot, \mu)) = 0$ 。当交互作用足够弱时, 即 Z 对于分布变量的依赖程度足够弱时, 将上述已有结果推广到分布依赖情形。

问题6.4 在文献[48]基础上, 研究 $\mathbb{R}^d$ 上分布依赖随机微分方程的经验分布在 $\mathbb{W}_p(p \in [1, \infty))$ 下的收敛速度。

致谢 作者感谢中国科学数学编委会的邀请, 感谢鲍建海教授、赵奕博士检查笔误。

参考文献

- 1 Bakry D, Gentil I, Ledoux M. Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators. Springer, 2014.

- 2 Bao J, Ren P, Wang F-Y. Bismut formula for Lions derivative of distribution-path dependent SDEs. *J. Diff. Equat.* 2021, 282: 285-329.
- 3 Barbu V, Röckner M. From nonlinear Fokker-Planck equations to solutions of distribution dependent SDE. *Ann. Probab.* 2020, 48: 1902-1920.
- 4 Bismut J M. Large Deviations and the Malliavin Calculus. Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- 5 Cai S, Feng X, Gong Y, Wang Z. Propagation of chaos for 2D log Gas on the whole space. *arXiv:2411.14777*.
- 6 Carrillo J A, Feng X, Guo S, Jabin P E. Relative entropy method for particle approximation of the Landau equation for Maxwellian molecules. *arXiv:2408.15035*.
- 7 Chaintron L P, Diez A. Propagation of chaos: a review of models, methods and applications. *arXiv:2106.14812*.
- 8 Davies E B, Simon B. Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. *J. Funct. Anal.* 1984, 59: 335-395.
- 9 Desvillettes L, Villani C. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials Part I: existence, uniqueness and smoothness. *Comm. Part. Diff. Equat.* 2000, 25: 179-259.
- 10 Desvillettes L, Villani C. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials Part II: H-theorem and applications. *Comm. Part. Diff. Equat.* 2000, 25:261-298.
- 11 Fournier N, Guillin A. From a Kac-like particle system to the Landau equation for hard potentials and Maxwell molecules. *Ann. Sci. l'École Norm. Sup.* 2017, 50: 157-199.
- 12 Fournier N, Hauray M. Propagation of chaos for the Landau equation with moderately soft potentials. *Ann. Probab.* 2016, 44: 3581-3660.
- 13 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.* 1975, 97: 1061-1083.
- 14 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups. *Dirichlet forms (Varenna, 1992)*, Lecture Notes in Math. vol. 1563, Springer, 1993, pp. 54-88.
- 15 Gong Y, Xie P, Wang Z. Uniform-in-time propagation of chaos for second order interacting particle systems. *arXiv:2409.02435*.
- 16 Guillin A, Liu W, Wu L, Zhang C. Uniform Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities for mean field particle systems. *Ann. Appl. Probab.* 2022, 32: 1590-1614.
- 17 Hao Z, Jabir J-F, Menozzi S., Röckner M, Zhang X. Propagation of chaos for moderately interacting particle systems related to singular kinetic McKean-Vlasov SDEs, *arXiv:2405.09195*.
- 18 Hao Z, Röckner M, Zhang X. Strong convergence of propagation of chaos for McKean-Vlasov SDEs with singular interactions. *SIAM J. Math. Anal.* 2024, 56: 2661-2713.
- 19 Hong W, Li S, Sun X. Diffusion approximation for multi-scale McKean-Vlasov SDEs through different methods. *J. Diff. Equat.* 2025, 414: 405-454.
- 20 Huang X, Lv W. Exponential ergodicity and propagation of chaos for path-distribution dependent stochastic Hamiltonian system. *Electron. J. Probab.* 2023, 28:134, 1-20.
- 21 Huang X, Ren P, Wang F-Y. Probability distance estimates between diffusion processes and applications to singular McKean-Vlasov SDEs. *J. Diff. Equat.* 2025, 420: 376-399.
- 22 Huang X, Ren P, Wang F-Y. Distribution dependent SDEs with singular interactions: well-posedness and regularity. *arXiv:2505.19787*.
- 23 Huang X, Röckner M, Wang F-Y. Nonlinear Fokker-Planck equations for probability measures on path space and path-distribution dependent SDEs. *Disc. Cont. Dyn. Syst. Ser. A* 2019, 39: 3017-3035.
- 24 Huang X, Wang F-Y. Regularities and exponential ergodicity in entropy for SDEs driven by distribution dependent noise. *Bernoulli* 2024, 30: 3303-3323.
- 25 Huang X, Wang F-Y. Log-Harnack inequality and Bismut formula for McKean-Vlasov SDEs with singularities in all variables. *arXiv:2207.11536*, to appear in *Math. Ann.*
- 26 Jabin P E, Wang Z. Quantitative estimate of propagation of chaos for stochastic systems with $W^{-1,\infty}$ kernels. *Invent. Math.* 2018, 214: 523-591.
- 27 Kac M. Foundations of kinetic theory. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. III, University of California Press, 1964, 171-197.
- 28 Kac M. Probability and Related Topics in the Physical Sciences. Interscience, New York, 1959.
- 29 Liggett T M. L^2 rates of convergence for attractive reversible nearest particle systems. *Ann. Probab.* 1991, 19: 935-959.
- 30 McKean H P. Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations. *1967 Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)* pp. 41-57.
- 31 McKean H P. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1996, 56: 1907-1911.
- 32 Ren P. Singular McKean-Vlasov SDEs: well-posedness, regularities and Wang's Harnack inequality. *Stoch. Proc. Appl.* 2023, 156: 291-311.
- 33 Ren P. Extrinsic derivative formula for distribution dependent SDEs, *Bernoulli* (to appear), *arXiv:2401.15551*.

- 34 Ren P, Wang F-Y. Derivative formulas in measure on Riemannian manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.* 2021, 53: 1786-1800.
- 35 Ren P, Wang F-Y. Bi-coupling method and applications, arXiv:2302.13500.
- 36 Röckner M, Wang F-Y. Weak Poincaré inequalities and L^2 -convergence rates of Markov semigroups. *J. Funct. Anal.* 2001, 185: 564-603.
- 37 Rosenzweig M, Serfaty S. Global-in-time mean-field convergence for singular Riesz-type diffusive flows. *Ann. Appl. Probab.* 2023, 33: 954-998.
- 38 Rothaus O S. Diffusion on compact Riemannian manifolds and logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.* 1981, 42: 102-109.
- 39 S. Serfaty, *Lectures on Coulomb and Riesz Gases*, arXiv:2407.21194.
- 40 Song Y, Wang Z. Regularity for distribution-dependent SDEs driven by jump processes. *Stoch. Dyn.* 2022, 22: Paper No. 2250011.
- 41 Sznitman A S. Topics in propagation of chaos. *Ecole d'Été de Prob. de Saint-Flour XIX-1989*, 165-251, *Lecture Notes in Math* 1464. Springer, Berlin, 1991.
- 42 Trevisan D, Wang F-Y, Zhu J-X. Wasserstein asymptotics for empirical measures of diffusions on four dimensional closed manifolds. arXiv:2410.21981.
- 43 Wang F-Y. Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Probab. Theory Relat. Fields* 1997, 109: 417-424.
- 44 Wang F-Y. Harnack inequalities on manifolds with boundary and applications. *J. Math. Pures Appl.* 2010, 94: 304-321.
- 45 Wang F-Y. *Harnack Inequality for Stochastic Partial Differential Equations*. Springer, 2013.
- 46 Wang F-Y. Distribution-dependent SDEs for Landau type equations. *Stoch. Proc. Appl.* 2018, 128: 595-621.
- 47 Wang F-Y. Precise limit in Wasserstein distance for conditional empirical measures of Dirichlet diffusion processes. *J. Funct. Anal.* 2021, 280: 108998.
- 48 Wang F-Y. Wasserstein convergence rate for empirical measures on noncompact manifolds. *Stoch. Proc. Appl.* 2022, 144: 271-287.
- 49 Wang F-Y. Convergence in Wasserstein Distance for Empirical Measures of Semilinear SPDEs. *Ann. Appl. Probab.* 2023, 33: 70-84.
- 50 Wang F-Y. Convergence in Wasserstein distance for empirical measures of Dirichlet diffusion processes on manifolds. *J. Eur. Math. Soc.* 2023, 25: 3695-3725.
- 51 Wang F-Y. Distribution Dependent Reflecting Stochastic Differential Equations. *Sci. China Math.* 2023, 66: 2411-2456.
- 52 Wang F-Y. Derivative Formula for Singular McKean-Vlasov SDEs. *Comm. Pure Appl. Anal.* 2023, 22: 1866-1898.
- 53 Wang F-Y. Convergence in Wasserstein distance for empirical measures of non-symmetric subordinated diffusion processes. arXiv:2301.08420.
- 54 Wang F-Y. Wasserstein convergence rate for empirical measures of Markov processes. arXiv:2309.04674, to appear in *Appl. Math. Opt.*
- 55 Wang F-Y. Asymptotics in Wasserstein distance for empirical measures of Markov processes. arXiv:2411.12996.
- 56 Wang F Y, Ren P. *Distribution Dependent Stochastic Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 2025.
- 57 Wang F-Y, Wu B, Zhu J-X. Sharp L^q -convergence Rate in p -Wasserstein distance for empirical measures of diffusion processes. arXiv:2408.09116, to appear in *Stoch. Proc. Appl.*
- 58 Wang F-Y, Zhu J-X. Limit Theorems in Wasserstein Distance for Empirical Measures of Diffusion Processes on Riemannian Manifolds. *Ann. l'Inst. H. Poinc. Probab. Statist.* 2023: 59, 437-475.
- 59 Wu L. Moderate deviations of dependent random variables related to CLT. *Ann. Probab.* 1995, 23: 420-445.
- 60 Wu L. Uniformly integrable operators and large deviations for Markov processes. *J. Funct. Anal.* 2000, 172: 301-376.
- 61 王凤雨, 任盼盼. 关于测度值过程的随机分析. *中国科学数学* 2020, 50: 231-252.

Some Problems on McKean-Vlasov Stochastic Systems

Feng-Yu Wang

Abstract McKean-Vlasov stochastic system is a crucial research object in stochastic analysis, partial differential equations and mathematical physics. In this paper, we introduced some frontier problems in this model, which include: propagation of chaos for mean field particle systems with singular interactions, regularity and ergodicity for distribution dependent SDEs with singular kernels, functional inequalities and applications to distribution dependent SDEs, and Wasserstein convergence rate for the empirical measure of distribution dependent SDEs.

Keywords McKean-Vlasov stochastic system, propagation of chaos, regularity, ergodicity, empirical measure.

MSC(2020) 35Q70

doi: 10.1360/SSM-2022-XXXX